

Seshadri-Konstanten auf Abelschen Flächen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
vorgelegt dem
Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg

von

Maximilian Schmidt
geboren in Fritzlar

Marburg, April 2021

Vom Fachbereich Mathematik und Informatik
der Philipps-Universität Marburg
(Hochschulkennziffer 1180)
als Dissertation angenommen am 05. Mai 2021

Erstgutachter: Prof. Dr. Thomas Bauer
Zweitgutachter: Prof. Dr. Tomasz Szemberg
Drittgutachter: Prof. Dr. Klaus Hulek

Tag der Einreichung: 04. Mai 2021
Tag der Disputation: 25. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen und eine alternative Sichtweise auf die Seshadri-Funktion	8
1.1 Seshadri-Konstanten	9
1.1.1 Seshadri-Konstanten auf projektiven Flächen	15
1.2 Seshadri-Konstanten auf Abelschen Flächen	19
1.2.1 Endomorphismenalgebra und Klassifikation von abelschen Flächen .	19
1.2.2 Eigenschaften von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen . . .	22
1.2.3 Kurven auf abelschen Flächen	23
1.3 Binäre quadratische Formen	26
2 Pell-Divisoren und submaximale Kurven auf abelschen Flächen	28
2.1 Pell-Divisoren	29
2.2 Einschränkungen für submaximale Kurven	32
2.3 Pell-Schranken und submaximale Kurven	40
2.4 Seshadri-Konstanten bei „kleinen“ Pell-Divisoren	43
3 Seshadri-Funktion auf abelschen Flächen mit Néron-Severi-Gruppe von Rang 2	47
3.1 Prinzipalpolarisierte einfache abelsche Flächen mit $\rho=2$	48
3.1.1 Néron-Severi-Gruppe und Nef-Kegel	48
3.1.2 Anzahl der submaximalen Kurven für ample Geradenbündel	51
3.1.3 Struktur der Seshadri-Funktion: „zerbrochen linear“	54
3.1.4 Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten und der Seshadri-Kurven	58
3.1.5 Fundamental-Kegel und Beispiele für Seshadri-Funktionen	62
3.1.6 Beispiele für Graphen von Seshadri-Funktionen:	65
3.1.7 Numerisches Kriterium zur Bestimmung der maximalen Anzahl von submaximalen Kurven	67
3.2 Beliebige einfache abelsche Fläche mit $\rho=2$	70
3.3 Nicht-einfache abelsche Flächen mit $\rho=2$	75
4 Ganzzahligkeit von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen	85
4.1 Kriterium für die Ganzzahligkeit aller Seshadri-Konstanten	86
4.2 Isogenien von elliptischen Kurven	90

4.3	Produkte $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ von isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation	92
4.3.1	Néron-Severi-Gruppe im Fall ohne komplexe Multiplikation	92
4.3.2	Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten im Fall ohne komplexe Multiplikation	95
4.3.3	Elliptische Kurven auf Produkten von zwei isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation	98
4.3.4	Klassifikation der Prinzipalpolarisierungen auf $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$	107
4.4	Produkte $\mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation	111
4.4.1	Néron-Severi-Gruppe im Fall mit komplexer Multiplikation	111
4.4.2	Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten im Fall mit komplexer Multiplikation	115
4.4.3	Elliptische Kurven auf Produkten von zwei isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation	121
Literaturverzeichnis		124
Anhang		127
	Maple-Code zur Konstruktion der Seshadri-Funktion	127
	English summary	136
	Danksagung	143
	Erklärung	144
	Lebenslauf	145

Einleitung

Wir werden uns in dieser Arbeit mit neuen Methoden zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten auf komplexen abelschen Flächen beschäftigen. Demailly führte die Seshadri-Konstante 1992 in [16] erstmals ein mit der Absicht, die Fujita-Vermutung [20] zu beweisen. Die Seshadri-Konstante eines nef Geradenbündels L auf einer glatten projektiven Varietät V der Dimension $g \geq 2$ in einem Punkt $x \in V$ ist definiert als die reelle Zahl

$$\varepsilon(L, x) = \inf \left\{ \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \mid x \in C \subset V \text{ irreduzible Kurve} \right\}.$$

Da die Seshadri-Konstante nur von der numerischen Klasse des Geradenbündels abhängig ist, induziert diese eine wohldefinierte Funktion auf dem Nef-Kegel

$$\varepsilon_x : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \mapsto \varepsilon(L, x).$$

Der Name geht auf das Seshadri-Kriterium zurück, welches unter Verwendung der Seshadri-Konstante besagt, dass ein Divisor D genau dann ample ist, wenn es eine Zahl $\varepsilon' > 0$ gibt, so dass $\varepsilon(D, x) \geq \varepsilon'$ für alle $x \in V$ gilt. Seshadri-Konstanten lassen sich daher als ein Maß für die lokale Positivität von L in x auffassen. Der erste Teil der Fujita-Vermutung besagt, dass für jedes ample Geradenbündel L und alle Zahlen $m \geq g + 1$ die Geradenbündel $K_V + mL$ global erzeugt sind. Demailly zeigte in [16, Prop. 6.8], dass dieser Teil der Fujita-Vermutung folgt, wenn $\varepsilon(L, x) > \frac{g}{g+1}$ für jeden Punkt $x \in V$ gilt. Beispiele von Miranda [35, Ex. 5.2.1] zeigen jedoch, dass die Seshadri-Konstante in einzelnen Punkten beliebig klein werden kann, was den Zugang zur Fujita-Vermutung erschwert.

Überraschenderweise enthalten Seshadri-Konstanten nicht nur Informationen über die lokalen Eigenschaften der Geradenbündel in einem Punkt, sondern können auch Informationen über die globale Geometrie der Varietät enthalten. So zeigte Nakamaye beispielsweise in [39], dass eine abelsche Varietät A der Dimension g genau dann ein amples Geradenbündel L mit $\varepsilon(L, 0) = 1$ besitzt, wenn A isomorph zu einem Produkt $E \times B$ ist, wobei E eine elliptische Kurve und B eine abelsche Varietät der Dimension $g - 1$ ist. Ebenfalls interessant ist, dass sich die Nagata-Vermutung mit Hilfe von mehr-punktigen Seshadri-Konstanten ausdrücken lässt. Es zeigte sich also zunehmend, dass Seshadri-Konstanten für sich selbst genommen interessante Invarianten sind.

Da Seshadri-Konstanten im Allgemeinen sehr schwer zu bestimmen sind, ist es hilfreich, sich auf Varietäten einzuschränken, deren Geometrie sehr gut verstanden ist. Zudem stehen uns auf projektiven Flächen stärkere Methoden zur Verfügung, weshalb wir Seshadri-Konstanten auf komplexen abelschen Flächen betrachten werden. Im Folgenden

bezeichnet A stets eine abelsche Fläche. Bauer gelang es 1999 in [3] sämtliche Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen mit Picard-Zahl $\rho(A) = 1$ zu bestimmen. Ein wesentliches Hilfsmittel für die Bestimmung der Seshadri-Konstante in diesem Fall waren sogenannte Pell-Divisoren und es zeigte sich, dass diese im Wesentlichen die Seshadri-Konstante berechnen. Abgesehen davon wurden 2008 von Bauer und Schulz Teilergebnisse auf Selbstprodukten von elliptischen Kurven erzielt [7]. Es gelang ihnen im Fall $E \times E$ die Seshadri-Konstanten explizit zu berechnen, sofern für den Endomorphismenring entweder $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$, $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ gilt. Interessanterweise wurden in diesem Fall sämtliche Seshadri-Konstanten von elliptischen Kurven berechnet und waren somit ganzzahlig. Die folgende Tabelle fasst den bisherigen Forschungsstand zusammen:

$\rho(A)$	nicht-einfach	einfach
1	Existiert nicht	Allgemeine abelsche Fläche Bauer (1999)
2	Fall $A = E_1 \times E_2$ E_1 und E_2 nicht isogen (trivialer Fall)	Reelle Multiplikation: Keine Ergebnisse <hr/> Komplexe Multiplikation: Keine Ergebnisse
3	Fall $A = E \times E$ E ohne komplexe Mult. Bauer, Schulz (2008)	Indefinite Quaternionenmult.: Keine Ergebnisse
4	Fall $A = E \times E$ $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ Bauer, Schulz (2008)	Existiert nicht

Wir werden in dieser Arbeit die Frage nach Seshadri-Konstanten vollständig im Fall $\rho(A) = 2$ beantworten. Außerdem werden wir Ergebnisse über die Struktur der Seshadri-Funktion erzielen. Zudem werden wir weitere Teilergebnisse für nicht-einfache abelsche Flächen mit $\rho(A) \geq 3$ erzielen, indem wir der Frage nachgehen, ob es weitere abelsche Flächen gibt, auf denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind.

Bei der Bestimmung von Seshadri-Konstanten ist es sinnvoll, dass wir die Eigenschaften von Kurven auf abelschen Flächen untersuchen. Die Kurven auf einer abelschen Fläche lassen sich in elliptische Kurven und ample Kurven aufteilen. Wir werden zeigen, dass jede elliptische Kurve durch 0 in einem offenen Unterkegel des Nef-Kegels die Seshadri-Konstante berechnet. Für submaximale ample Kurven wird es uns gelingen einen essenziellen Zusammenhang zu den von Bauer eingeführten Pell-Divisoren herzuleiten:

Theorem 1. *Sei A eine abelsche Fläche und C eine irreduzible submaximale Kurve auf A . Wir setzen $m = \text{mult}_0 C$ und erhalten entweder*

$$C^2 - m^2 = -1 \quad \text{oder} \quad C^2 - m^2 = -4.$$

Falls C zusätzlich ample ist, gilt weiter: Sei M das primitive ample Geradenbündel mit $\mathcal{O}_A(C) = pM$ für $p \in \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt{M^2}$ irrational. Sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - M^2 y^2 = 1$, dann gilt:

- (i) Falls $C^2 - m^2 = -1$ ist, dann ist $2C$ der einzige Pell-Divisor von M und es gilt $(\ell, k) = (m, p)$.
- (ii) Falls $C^2 - m^2 = -4$ ist, dann ist C der einzige Pell-Divisor von M und es gilt $(2\ell, 2k) = (m, p)$. In diesem Fall ist der Nullpunkt die einzige Halbperiode, die auf C liegt.

Dieses Theorem wird das Fundament dieser Arbeit bilden und impliziert eine Vielzahl von Eigenschaften und Einschränkungen, welche wir in Kapitel 2 darstellen werden. Eine dieser Eigenschaften ist, dass Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen nur von der Néron-Severi-Gruppe und somit im Wesentlichen nur von der Schnittmatrix abhängen. Denn ohne das nachfolgende Theorem wäre es denkbar, dass auch weitere geometrische Eigenschaften wie das zugrunde liegende Gitter die Seshadri-Konstante beeinflussen können.

Theorem 2. Seien X und Y zwei (nicht notwendig isomorphe) abelsche Flächen mit gleicher Picard-Zahl ρ . Weiter seien (B_1, \dots, B_ρ) und (B'_1, \dots, B'_ρ) Basen von $\text{NS}(X)$ und $\text{NS}(Y)$, so dass diese Basen dieselbe Schnittmatrix besitzen und sie im Néron-Severi-Vektorraum den gleichen Nef-Kegel erzeugen (beispielsweise falls zusätzlich alle B_i und B'_i ample sind). Dann stimmen die Seshadri-Funktionen unter dem kanonischen Isomorphismus $\text{Nef}(X) \cong \text{Nef}(Y)$ überein, d. h. $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$.

Nachdem Bauer den Fall $\rho(A) = 1$ vollständig geklärt hat, ist es naheliegend, sich dem Fall $\rho(A) = 2$ zu widmen. Wir werden in Kapitel 3 die Frage nach Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen mit $\rho(A) = 2$ vollständig beantworten:

Theorem 3. Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho(A) = 2$ und L ein nef \mathbb{Q} -Geradenbündel auf A , dann gibt es einen effektiven Algorithmus, der die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Kurven von L bestimmt.

Es wird uns mit dem Algorithmus 3.1.23 nicht nur möglich sein, die Seshadri-Konstante einzelner Geradenbündel zu bestimmen, sondern auch näherungsweise die Seshadri-Funktion als Graph zu skizzieren. Wir liefern an der Stelle zwei Beispiele für Seshadri-Funktionen, um die unterschiedlichen Komplexitäten der Funktionen darzustellen. Für eine genauere Beschreibung der Funktionsgraphen verweisen wir auf Kapitel 3 bzw. Abschnitt 3.1.6.

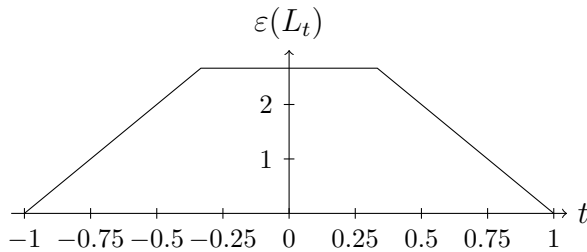


Abb. 1: Die Seshadri-Funktion auf einem Querschnitt des Nef-Kegels einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

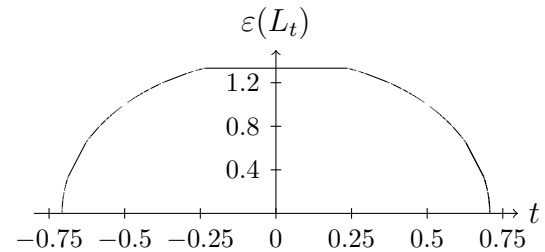


Abb. 2: Die Seshadri-Funktion auf einem Querschnitt des Nef-Kegels einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ besitzt.

Die Seshadri-Funktion in Abb. 1 liegt auf einer nicht-einfachen abelschen Fläche vor und ist global stückweise linear. Die Seshadri-Funktion in Abb. 2 zeigt die Seshadri-Funktion einer einfachen abelschen Fläche mit reeller Multiplikation $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Diese Funktion besitzt die Eigenschaft, dass sie aus unendlich vielen linearen Segmenten besteht, die jedoch niemals aneinander grenzen. Wir führen die folgende Definition für Funktionen mit dieser Eigenschaft ein.

Definition 4. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „zerbrochen linear“, falls eine unendliche und nirgends dichte Teilmenge $M \subset I$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) Für jeden Punkt $p \in I \setminus M$ existiert ein offenes Intervall $I_p \subset I \setminus M$, so dass $f|_{I_p}$ eine lineare Funktion ist.
- (ii) Falls $I_1 = (t_1, t_2)$ und $I_2 = (s_1, s_2)$ maximale offene Intervalle in I sind, auf denen f linear ist, dann sind I_1 und I_2 in $I \setminus M$ enthalten, und I_1 und I_2 grenzen nicht aneinander, d. h. $t_1 \neq s_2$ und $t_2 \neq s_1$.

Die Cantor-Funktion (siehe bspw. [17] oder Abb. 3.6) ist eine zerbrochen lineare Funktion, wobei die Menge M die Cantor-Menge ist.

Mit Hilfe der maximalen Anzahl der submaximalen Kurven die ein Geradenbündel besitzen kann, können wir ein Kriterium formulieren, wann die Seshadri-Funktion zerbrochen linear ist.

Theorem 5. *Sei A eine einfache abelsche Fläche mit $\rho(A) = 2$, so dass jedes nef Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt. Dann ist die Seshadri-Funktion zerbrochen linear.*

Wir haben die Frage, wann jedes Geradenbündel auf A höchstens eine submaximale Kurve besitzt, vor allem im Fall von prinzipalpolarisierten abelschen Flächen untersucht:

Theorem 6. *Sei A eine prinzipalpolarisierte einfache abelsche Fläche mit $\rho(A) = 2$, so dass der symmetrische Endomorphismenring eine der folgenden Formen besitzt:*

- $\text{End}^{\text{sym}}(A) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e , oder
- $\text{End}^{\text{sym}}(A) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$, wobei e zusätzlich einen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$ besitzt.

Dann besitzt jedes nef Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve.

Computergestützte Berechnungen in Maple deuten sogar darauf hin, dass die Aussage von Thm. 6 eine „genau dann wenn“ Aussage ist.

Unklar bleibt an dieser Stelle jedoch, wie sich die Seshadri-Funktion in den verbleibenden Fällen verhält. Auf nicht-einfachen abelschen Flächen kann es wie in Abb. 2 vorkommen, dass die Seshadri-Funktion stückweise linear ist. Allerdings zeigen weitere Beispiele, dass dort auch komplexere Strukturen auftreten können (siehe Abb. 3.20 und 3.23). Auf einfachen abelschen Flächen, die Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven besitzt, deuten weitere Beispiele an, dass sich die Struktur nur geringfügig von dem

Fall unterscheiden könnte, in dem jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzen. Obwohl die genaue Struktur der Seshadri-Funktion sehr komplex ist und zum Teil verborgen bleibt, zeigt sich auf einfachen abelschen Flächen mit $\rho(A) = 2$, dass die Seshadri-Funktion eine gewisse periodische Regelmäßigkeit besitzt, denn Thm. 2 impliziert, dass die Seshadri-Funktion unter Isometrien von $\mathrm{NS}(A)$ bzgl. des Schnittproduktes invariant bleibt.

Theorem 7. *Sei A eine einfache abelsche Fläche mit $\rho(A) = 2$. Dann gibt es eine Zerlegung des Ample-Kegels in unendlich viele Unterkegel \mathcal{C}_k mit $k \in \mathbb{Z}$, so dass die unendliche Gruppe G der Isometrien von $\mathrm{NS}(A)$ bzgl. des Schnittproduktes, welche den Ample-Kegel invariant lassen, transitiv auf der Menge der Unterkegel wirkt. Insbesondere wird die Seshadri-Funktion bereits durch die Werte auf einem Unterkegel \mathcal{C}_k vollständig bestimmt.*

Bei den Untersuchungen von Selbstprodukten von elliptischen Kurven zeigten Bauer und Schulz in [7], dass in den betrachteten Fällen alle Seshadri-Konstanten auf $E \times E$ stets von elliptischen Kurven berechnet werden und somit ganzzahlig sind. Wir untersuchen in Kapitel 4 daher die Frage, ob es weitere abelsche Flächen gibt, auf denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind, und ob diese auch stets von elliptischen Kurven berechnet werden. Das Ergebnis von Bauer in [3] zeigt, dass es abelsche Flächen mit $\rho(A) = 1$ gibt, so dass alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind, diese aber nicht von elliptischen Kurven bestimmt werden. Überraschenderweise können wir jedoch mit Thm. 1 für $\rho(A) \geq 2$ zeigen:

Theorem 8. *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho(A) \geq 2$. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A wird die Seshadri-Konstante von L von einer elliptischen Kurve berechnet.*

Diese Tatsache hat zur Folge, dass es auf einfachen abelschen Flächen mit $\rho(A) \geq 2$ stets nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten geben muss. Es verbleiben also die nicht-einfachen abelschen Flächen. Der Fall $\rho(A) = 2$ ist durch die vorherigen Betrachtungen vollständig geklärt. In diesem Fall gibt es genau zwei Klassen von nicht-einfachen abelschen Flächen, auf denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind und von elliptischen Kurven berechnet werden. Im Fall $\rho(A) \geq 3$ werden wir uns auf Produkte von isogenen elliptischen Kurven $E_1 \times E_2$ beschränken, da wir auf diesen einen Zugang zu der Néron-Severi-Gruppe und dessen Schnittmatrix haben. Eine mögliche Herangehensweise ist die explizite Suche nach Geradenbündeln, die eine nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen. So zeigte Steffens in [45, Prop. 3], dass die Seshadri-Konstante einer irreduziblen Prinzipalpolarisierung $\frac{4}{3}$ beträgt. Die Existenz von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen auf Produkten $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven E_1 und E_2 wurde erstmals von Hayashida und Nishi in [23] untersucht. Kani beantwortete diese Frage in [29] und [30] nahezu vollständig und zeigte, dass es 36 oder 37 Klassen von Produkten $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven gibt, in denen *keine* irreduzible Prinzipalpolarisierungen existieren. Abzüglich der von Bauer und Schulz betrachteten Fälle verbleiben somit 34 Klassen von Produkten $E_1 \times E_2$ auf denen unklar ist, ob alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. Wir zeigen,

dass die Eigenschaft, dass alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind, seltener ist als angenommen: Es gibt genau eine weitere Klasse, auf der alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. Zusammengefasst gilt also:

Theorem 9. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven.*

- (i) *Falls E_1 und E_2 keine komplexe Multiplikation besitzen, dann sind alle Seshadri-Konstanten auf $E_1 \times E_2$ genau dann ganzzahlig, wenn der minimale Grad der Isogenien $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ höchstens 2 beträgt.*
- (ii) *Falls E_1 und E_2 komplexe Multiplikation besitzen, dann sind alle Seshadri-Konstanten auf $E_1 \times E_2$ genau dann ganzzahlig, wenn E_1 und E_2 isomorph sind und für den Endomorphismenring gilt entweder $\text{End}(E_1) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})]$.*

Außerdem lassen sich in diesem Fall alle Seshadri-Konstanten effektiv berechnen.

Wir werden dieses Ergebnis erzielen, indem wir zunächst auf allen anderen Produkten von isogenen elliptischen Kurven ample Geradenbündel konstruieren, die keine schwach-submaximale elliptische Kurve besitzen können, weshalb die Seshadri-Konstante des Geradenbündels nicht von einer elliptischen Kurve bestimmt werden kann. Unter Berücksichtigung der Ergebnisse von Bauer und Schulz verbleiben die Produkte $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation, deren minimaler Grad der Isogenien $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ zwei beträgt. Auf diesen zeigen wir, dass jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ berechnet wird, indem wir den Schnitt eines amplen Geradenbündels mit einer elliptischen Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ durch eine positiv-definite (binäre) quadratische Form darstellen werden. Mit Hilfe von bekannten Aussagen über diese quadratischen Formen können wir dann zeigen, dass die Seshadri-Konstanten stets von elliptischen Kurven berechnet werden. Dieser Ansatz liefert uns außerdem einen Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstante.

Ein Großteil der Ergebnisse wurde bereits in [5], [43] und [6] publiziert. In dieser Arbeit werden Teile dieser Resultate verallgemeinert und erweitert. In [6] untersuchten wir die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Funktion nur auf prinzipalpolarisierten einfachen abelschen Flächen mit $\rho(A) = 2$, welche reelle Multiplikation besitzen. Die dort verwendeten Methoden lassen sich jedoch auf beliebige abelsche Flächen mit $\rho(A) = 2$ verallgemeinern. Außerdem wird es möglich sein, einige Aussagen für beliebige abelsche Flächen zu verallgemeinern, was erste Ansätze für die verbleibenden Fälle $\rho(A) = 3$ und $\rho(A) = 4$ liefern könnte.

Im ersten Kapitel werden wir nicht nur wichtige Grundlagen und Eigenschaften von Seshadri-Konstanten und abelschen Flächen zusammentragen, sondern auch eine neue Sichtweise auf die Seshadri-Funktion einführen. Wir werden die Seshadri-Funktion als Infimum einer Familie von linearen Funktionen auffassen, womit es möglich wird, dass wir die Bestimmung der Seshadri-Konstante eines nef Bündels L in x nicht mehr als isoliertes Problem in L betrachten, sondern auch die globalen geometrischen Eigenschaften der Seshadri-Funktion ausnutzen. Dies hat zur Folge, dass sich isolierte Eigenschaften der Seshadri-Konstante eines Geradenbündels L sowohl lokal in einer Umgebung der Klasse von L als auch global auf die Seshadri-Funktion auswirken können. So werden wir beispielsweise zeigen, welchen Einfluss eine obere Schranke an die Seshadri-Konstante von L auf die Seshadri-Kurven von L hat:

Proposition 10. *Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension $g \geq 2$, $x \in V$ und L ein amples Geradenbündel. Weiter sei $0 < R < \sqrt[g]{L^g}$ eine obere Schranke der Seshadri-Konstante von L in x . Dann gibt es einen offenen konvexen Unterkegel $U(L, R, x)$ in $\text{Nef}(V)$, auf dem jede Seshadri-Kurve von L submaximal ist. Das heißt, dass für jede Klasse $M \in U(L, R, x)$ und jede Seshadri-Kurve C von L gilt*

$$\frac{M \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt[g]{M^g}.$$

Diese Aussage wird ein Schlüsselargument für die Bestimmung der Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen A mit $\rho(A) = 2$ sein, da wir dort zeigen werden, dass es für einen beliebigen offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(A)$ nur endlich viele Seshadri-Kurven gibt, die auf U submaximal sein können.

Wir werden im ersten Kapitel ebenfalls eine neue Aussage über die lokale Struktur der Seshadri-Funktion treffen, welche notwendig für Thm. 5 ist. Szemberg zeigte in [46], dass es auf einer glatten projektiven Fläche S höchstens $\rho(S)$ submaximale Kurven gibt. Mit diesem Resultat erhalten wir unter Verwendung der Interpretation der Seshadri-Funktion als Infimum von linearen Funktionen, dass die Seshadri-Funktion im Fall $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ folgende (einfache) lokale Struktur besitzt:

Satz 11. *Sei S eine glatte projektive Fläche, $L \in \text{Nef}(S)$ und $x \in S$. Weiter gelte $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ und sei $1 \leq n \leq \rho(S)$ die Anzahl der Seshadri-Kurven von L in x . Dann gibt es einen offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(S)$ um L , so dass die Seshadri-Funktion in U das Minimum von n linearen Funktionen ist, d. h. es gilt*

$$\varepsilon_x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad L' \mapsto \min \{ \varphi_{C_i, x}(L') \mid i = 1, \dots, n \},$$

wobei C_1, \dots, C_n die Seshadri-Kurven von L in x sind.

Das heißt also, dass die Seshadri-Funktion im Fall $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ lokal das Verhalten einer stückweisen linearen Funktion besitzt. Im Gegensatz dazu, zeigt die Seshadri-Funktion in Abb. 2 jedoch, dass diese linearen Stücke in einer sehr komplexen Weise zusammengesetzt sein können.

Kapitel 1

Grundlagen und eine alternative Sichtweise auf die Seshadri-Funktion

In diesem Kapitel werden wir uns mit den wichtigsten Grundlagen und Eigenschaften von Seshadri-Konstanten und abelschen Flächen beschäftigen, die wir für spätere Betrachtungen brauchen werden. Für einen vollständigen Überblick über Seshadri-Konstanten verweisen wir auf [35, Ch. 5] sowie [9] und für die notwendigen Grundlagen für abelsche Varietäten verweisen wir auf [11].

Wir werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels zunächst einen Überblick über Seshadri-Konstanten geben, wobei wir uns auf projektive Flächen spezialisieren werden. Darüber hinaus werden wir bereits im ersten Abschnitt mit Hilfe einer alternativen Betrachtungsweise der Seshadri-Funktion neue Eigenschaften herleiten: Indem wir die Seshadri-Funktion als Infimum einer Familie linearer Funktionen auffassen, können wir von Eigenschaften einzelner Geradenbündel auf globale Eigenschaften der Seshadri-Funktion schließen. So wird es mit dieser Methode unter anderem möglich sein, dass wir aus einer unteren Schranke $r > 0$ für die Seshadri-Konstante eines Geradenbündels L , d. h. $\varepsilon(L, x) \geq r$, eine stetige Funktion konstruieren können, die auf dem gesamten Nef-Kegel eine untere Schranke für die Seshadri-Funktion darstellt. Auf projektiven Flächen können wir außerdem einen offenen Kegel konstruieren, in dem jede Seshadri-Kurve von L submaximal ist. Dies wird sich als wertvolles Werkzeug für die Berechnung von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen herausstellen.

Wir werden uns im zweiten Abschnitt auf abelsche Flächen einschränken und die Klassifikation der abelschen Flächen anhand ihrer Endomorphismenringe zusammenfassen. Für die Bestimmung von Seshadri-Konstanten ist es hilfreich, dass wir möglichst viele Informationen über die Kurven auf der entsprechenden Varietät haben. Wir werden daher wichtige Eigenschaften der Kurven auf abelsche Flächen zusammentragen. Wir zeigen außerdem, dass jede elliptische Kurve E auf einer nicht-einfachen abelschen Fläche A in einem offenen Unterkegel die Seshadri-Konstante berechnet. Somit spielen elliptische Kurven eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Seshadri-Konstanten auf nicht-einfachen abelschen Flächen.

Wir werden in Kapitel 3 abelsche Flächen A mit $\rho(A) = 2$ betrachten. In dieser Situation können wir die Schnittmatrix als binäre quadratische Form auffassen und es wird hilfreich sein, dass wir eine geeignete Basis für die Néron-Severi-Gruppe wählen können, so dass die Schnittmatrix in einer Normalform vorliegt. Daher werden wir im dritten Abschnitt auf Normalformen von binären quadratischen Formen eingehen.

1.1. Seshadri-Konstanten

Wir werden hier die wichtigsten Eigenschaften von Seshadri-Konstanten zusammentragen. Zudem werden wir eine neue Sichtweise auf die Seshadri-Funktion entwickeln, mit der wir mit Hilfe geometrischer Argumente neue Eigenschaften erschließen können.

Definition 1.1.1. Sei V eine glatte irreduzible projektive Varietät der Dimension $g \geq 2$, $x \in V$ ein Punkt und L ein nef Geradenbündel auf V .

(i) Die *Seshadri-Konstante* von L in x ist die reelle Zahl

$$\varepsilon(L, x) := \inf \left\{ \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \mid x \in C \subset V \text{ irreduzible Kurve} \right\}.$$

(ii) Eine Kurve $C \subset V$ mit $\varepsilon(L, x) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C}$ nennen wir *Seshadri-Kurve* (von L in x).

Bemerkung 1.1.2. Es ist bislang unbekannt, ob es immer eine Seshadri-Kurve gibt oder ob es möglich ist, dass die Seshadri-Konstante tatsächlich nur als Infimum angenommen wird. Da bisher nur Fälle bekannt sind, in denen das Infimum angenommen wird, ist es ebenso unklar, ob es nicht-rationale Seshadri-Konstanten gibt.

Seien L und L' nef Geradenbündel, dann gilt für die Seshadri-Konstante:

- $\varepsilon(L, x) \geq 0$ und, falls L sehr ample ist, dann gilt $\varepsilon(L, x) \geq 1$.
- $\varepsilon(L, x) = \varepsilon(L', x)$, falls L und L' numerisch äquivalent sind.
- $\varepsilon(nL, x) = n\varepsilon(L, x)$ für $n > 0$. (homogen)
- $\varepsilon(L + L', x) \geq \varepsilon(L, x) + \varepsilon(L', x)$. (superadditiv)

Ist C eine nicht irreduzible Kurve durch x , d. h. $C = \sum a_i C_i$ für $a_i \in \mathbb{N}$ und irreduzible Kurven $C_i \subset V$, so gibt es eine Komponente $C_i \subset C$ durch x , dessen Seshadri-Quotient kleiner ist als der Seshadri-Quotient von C , d. h. es gilt

$$\min \left\{ \frac{L \cdot C_i}{\text{mult}_x C_i} \mid C_i \text{ ist Komponente von } C \text{ mit } x \in C_i \right\} \leq \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C}.$$

Da die Seshadri-Konstante unabhängig von der numerischen Klasse der Geradenbündel ist, genügt es Klassen in der Néron-Severi-Gruppe $\text{NS}(V)$ zu untersuchen und wir werden daher im Folgenden die numerische Klasse eines Geradenbündels häufig mit dem Geradenbündel identifizieren. Die Definition der Seshadri-Konstante lässt sich analog auf reelle Geradenbündel und somit auf Elemente des Néron-Severi-Raums $\text{NS}_{\mathbb{R}}(V)$ erweitern. Somit können wir die Definition von Seshadri-Konstanten auf den Ample- bzw. Nef-Kegel,

$$\text{Amp}(V) := \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(V) \mid L \text{ ample} \} \quad \text{bzw.} \quad \text{Nef}(V) := \{ L \in \text{NS}_{\mathbb{R}}(V) \mid L \text{ nef} \},$$

fortsetzen und erhalten daher für einen festen Punkt $x \in V$ die wohldefinierte Funktion

$$\varepsilon_x : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad L \mapsto \varepsilon(L, x).$$

Aufgrund der Homogenität genügt es, dass wir die Seshadri-Funktion auf einem kompakten Querschnitt $K \subset \text{Nef}(V)$ betrachten, so dass wir die Seshadri-Funktion als reelle Abbildung $K \subset \mathbb{R}^{\rho-1} \rightarrow \mathbb{R}$ interpretieren können, wobei ρ der Rang der Néron-Severi-Gruppe ist.

Für eine beliebige Kurve C durch x erhalten wir die lineare Funktion

$$\varphi_{C,x} : \text{NS}_{\mathbb{R}}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \mapsto \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C},$$

welche den Seshadri-Quotienten von C mit einem beliebigen Geradenbündel L in x angibt.

Lemma 1.1.3. *Sei V eine glatte irreduzible projektive Varietät und $x \in V$. Dann ist die Seshadri-Funktion ε_x das punktweise Infimum einer Familie linearer Funktionen, d. h.*

$$\varepsilon_x : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad L \mapsto \inf \{ \varphi_{C,x}(L) \mid C \subset V \text{ Kurve durch } x \}.$$

Diese Darstellung der Seshadri-Funktion wird uns helfen, weitere geometrische Eigenschaften herzuleiten, die für die Bestimmung der Seshadri-Konstante eine große Rolle spielen werden. Als erste Anwendung dieser Darstellung werden wir einen alternativen Beweis für die Stetigkeit der Seshadri-Funktion herleiten.

Proposition 1.1.4. *Sei $W \subset \mathbb{R}^g$ eine abgeschlossene Menge und $M \in \mathbb{R}$. Sei*

$$\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \{ \ell : \mathbb{R}^g \rightarrow \mathbb{R} \mid \ell \text{ ist linear und } \ell(w) \geq M \text{ für alle } w \in W \}.$$

Dann ist die Funktion

$$f : W \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto \inf \{ \ell(w) \mid \ell \in \mathcal{F} \}$$

konkav und stetig.

Beweis. Aufgrund der Eigenschaften des Infimums lässt sich leicht zeigen, dass f homogen und superadditiv ist. Somit folgt, dass f konkav ist. Sei $w \in W$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W$ eine Folge, die gegen w konvergiert. Angenommen $(f(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere nicht gegen $f(w)$, dann gibt es eine Schranke $R > 0$, so dass für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ entweder

$$f(w_n) \geq f(w) + R \quad \text{oder} \quad f(w_n) \leq f(w) - R$$

gilt. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $f(w_n) \geq f(w) + R$ für alle w_n gilt. Da $f(w)$ das punktweise Infimum von linearen Funktionen ist, gibt es eine lineare Funktion $\ell \in \mathcal{F}$ mit $\ell(w) < f(w) + \frac{R}{2}$. Wegen der Stetigkeit von ℓ gibt es eine offene Umgebung U um w , so dass $\ell(v) < f(w) + R$ für alle $v \in U$ gilt. Wegen der Konvergenz von $w_n \rightarrow w$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$

$$\ell(w_n) < f(w) + R \leq f(w_n)$$

gilt. Dies ist aber ein Widerspruch, da $f(w_n)$ das Infimum über alle Funktionen in \mathcal{F} ist. \square

Dies liefert einen alternativen Beweis für die bereits bekannte Aussage über die Stetigkeit der Seshadri-Konstante.

Korollar 1.1.5 ([40], [19, Thm. 6.2.]). *Sei V eine irreduzible projektive Varietät und $x \in V$ ein Punkt. Dann ist die Seshadri-Funktion*

$$\varepsilon_x : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \mapsto \varepsilon(L, x)$$

konkav und stetig.

Im Allgemeinen sind Seshadri-Konstanten sehr schwierig zu berechnen und nur in speziellen Situationen bekannt. Ein Ansatz ist, dass man untere und obere Schranken für die Seshadri-Konstante konstruiert. Unabhängig vom Punkt $x \in V$ können wir eine allgemeine obere Schranke für die Seshadri-Konstante angeben.

Proposition 1.1.6 ([35, Prop. 5.2.9]). *Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension g , $L \in \text{Nef}(V)$ und $x \in V$ ein Punkt. Für jede Untervarietät $W \subset V$ mit $x \in W$ gilt*

$$\varepsilon(L, x) \leq \sqrt[\dim(W)]{\frac{L^{\dim(W)} \cdot W}{\text{mult}_x W}}.$$

Insbesondere erhalten wir für $W = V$ die allgemeine obere Schranke $\varepsilon(L, x) \leq \sqrt[g]{L^g}$, welche auf $\text{Nef}(V)$ eine konkave und stetige Funktion liefert.

Untere Schranken dagegen sind im Allgemeinen sehr schwierig zu konstruieren, da man für diese zeigen muss, dass es keine Kurven (oder Untervarietäten) von kleinem Grad bzgl. L und entsprechend hoher Multiplizität gibt. Die Darstellung der Seshadri-Funktion als Infimum von linearen Funktionen eröffnet uns jedoch die Konstruktion einer *globalen* unteren Schranke für die Seshadri-Funktion, falls wir eine untere Schranke für ein *einzelnes* Geradenbündel kennen.

Proposition 1.1.7. *Sei V eine glatte projektive Varietät, $L \in \text{Nef}(V)$ und $x \in V$. Weiter sei $r > 0$ eine untere Schranke für $\varepsilon(L, x)$. Wir definieren die Familie*

$$\mathcal{F}_L = \{ \ell : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R} \mid \ell \text{ ist linear und } \ell(L') \geq 0 \text{ für alle } L' \in \text{Nef}(V) \text{ und } \ell(L) \geq r \}.$$

Dann ist die Funktion $\varepsilon_{L,r,x} : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R}$, $L' \mapsto \inf \{ \ell(L') \mid L' \in \mathcal{F}_L \}$ eine untere Schranke für die Seshadri-Funktion. Außerdem ist $\varepsilon_{L,r,x}$ konkav und stetig.

Bemerkung 1.1.8. Wir möchten an dieser Stelle die Aussage von Prop. 1.1.7 veranschaulichen. Wir betrachten dazu einen kompakten Querschnitt des Nef-Kegels, welcher durch einen Schnitt mit einer geeigneten affinen Hyperebene entsteht. Wir identifizieren den kompakten Querschnitt K als Teilmenge \mathbb{R}^{p-1} und bezeichnen das zu $v \in K$ assoziierte Geradenbündel mit M_v . Wir fassen somit die Seshadri-Funktion wie folgt auf:

$$\varepsilon_x : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad v \mapsto \varepsilon(M_v, x).$$

Man beachte, dass es genügt die Seshadri-Funktion auf K zu betrachten, da wir mit der Homogenität die Seshadri-Funktion auf dem Nef-Kegel rekonstruieren können.

Sei $M_w \in K$ das zu L gehörige Geradenbündel, das heißt, dass $M_w = qL$ für ein $q \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt. Dann ist $r' := qr$ eine untere Schranke für die Seshadri-Konstante von M_w . Für ein beliebiges Geradenbündel $M_v \in K$ schränken wir die Seshadri-Funktion ε_x auf die Gerade durch w und v ein und erhalten somit eine reelle Funktion der Form

$$\tilde{\varepsilon}_x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad t \mapsto \varepsilon(M_{w+(v-w)t}, x).$$

Wir betrachten nun die beiden linearen Funktionen ℓ_1 und ℓ_2 , welche jeweils durch die Punkte $(a, 0)$ und $(0, r')$ sowie $(0, r')$ und $(b, 0)$ definiert sind. Da wir nach Voraussetzung die untere Schranke r' für $\tilde{\varepsilon}_x(0) = \varepsilon(M_v, x)$ haben und da der Schnitt einer beliebigen Kurve C mit einem nef Geradenbündel nicht negativ ist und in 0 mindestens r' beträgt, muss die lineare Funktion $\varphi_C|_{[a,b]}$ im Intervall $[a, 0]$ größer gleich ℓ_1 und im Intervall $[0, b]$ größer gleich ℓ_2 sein. Folglich liefert uns $t \mapsto \min \{ \ell_1(t), \ell_2(t) \}$ eine untere Schranke auf dem gesamten Intervall $[a, b]$. Die folgende Graphik illustriert den Bereich in dem sich die Seshadri-Funktion aufhalten muss. Die gestrichelte Linie entspricht dabei der allgemeinen oberen Schranke $L \mapsto \sqrt[g]{L^g}$.

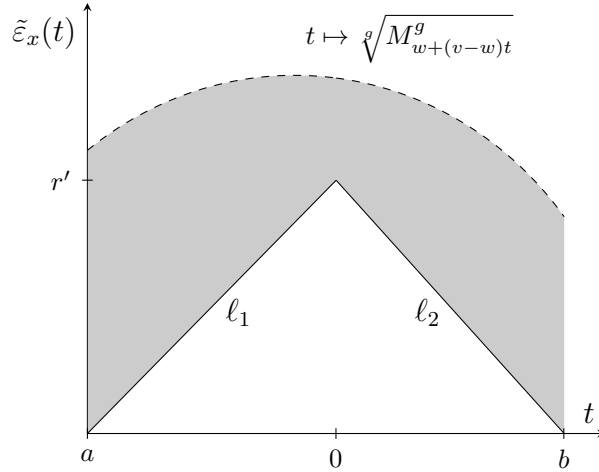


Abb. 1.1: Untere Schranke auf einem Querschnitt. Die Seshadri-Funktion verläuft im grauen Bereich.

Indem wir diese Konstruktion nun für jede Gerade durchführen, die durch $w \in K$ geht, erhalten wir die globale untere Schranke $\varepsilon_{L,r,x} : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R}$.

Jede weitere bekannte untere Schranke für andere Geradenbündel L' liefert zusätzliche Einschränkungen an diese Konstruktion und verbessert die untere Schranke.

Eine besondere Rolle werden Kurven spielen, deren Seshadri-Quotient in L kleiner (oder gleich) der oberen Schranke $\sqrt[g]{L^g}$ sind.

Definition 1.1.9. Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension g , $L \in \text{Nef}(V)$ und $x \in V$ ein Punkt. Eine Kurve C heißt *submaximal* (für L im Punkt x), falls gilt

$$\varphi_{C,x}(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt[g]{L^g}.$$

Im Fall $\varphi_{C,x}(L, x) \leq \sqrt[g]{L^g}$ nennen wir C *schwach-submaximal*.

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel werden die offenen Mengen in $\text{Nef}(V)$ sein, in denen eine Kurve submaximal ist.

Definition 1.1.10. Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension g und $f : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion. Wir nennen die Menge

$$\text{SG}(f) = \left\{ L \in \text{Nef}(V) \mid f(L) < \sqrt[g]{L^g} \right\}$$

das *Submaximalitäts-Gebiet* von f . Für das Submaximalitäts-Gebiet einer Kurve C durch x verwenden wir sowohl die Schreibweise $\text{SG}(C, x)$ als auch $\text{SG}(\varphi_{C,x})$.

Lemma 1.1.11. Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension g und $C \subset V$ eine Kurve durch $x \in V$. Dann ist das Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(C, x)$ ein offener konvexer Unterkegel von $\text{Nef}(V)$.

Beweis. Offensichtlich ist C genau dann submaximal für ein Geradenbündel L , wenn C submaximal für rL für alle $r > 0$ ist. Somit ist $\text{SG}(C, x)$ ein Kegel und es verbleibt zu zeigen, dass dieser Kegel konvex ist. Wir wählen dazu zwei verschiedene Geradenbündel $L_1, L_2 \in \text{SG}(C, x)$ und $\lambda \in (0, 1)$. Die Behauptung folgt, wenn wir zeigen, dass C submaximal für das Geradenbündel $\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2$ für $\lambda \in (0, 1)$ ist. Da C jeweils submaximal für L_1 und L_2 ist, gilt

$$\frac{(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2) \cdot C}{\text{mult}_x C} < \lambda \sqrt[g]{L_1^g} + (1 - \lambda) \sqrt[g]{L_2^g} \leq \sqrt[g]{(\lambda L_1 + (1 - \lambda)L_2)^g},$$

wobei die letzte Ungleichung eine Konsequenz der verallgemeinerten Hodge-Index-Ungleichung [35, Thm. 1.6.1] ist. \square

Wir widmen uns dem Fall, dass wir eine obere Schranke $R < \sqrt[g]{L^g}$ für die Seshadri-Konstante von L haben. In diesem Fall können wir einen offenen konvexen Unterkegel von $\text{Nef}(V)$ konstruieren, auf dem jede Seshadri-Kurve von L submaximal ist. Wir erhalten also ein notwendiges Kriterium für die Seshadri-Kurve eines Geradenbündels.

Proposition 1.1.12. Sei V eine glatte projektive Varietät der Dimension $g \geq 2$, $x \in V$ und $L \in \text{Amp}(V)$. Weiter sei $0 < R < \sqrt[g]{L^g}$ eine obere Schranke der Seshadri-Konstante von L in x . Dann gibt es einen offenen konvexen Unterkegel $U(L, R, x) \subset \text{Nef}(V)$, auf dem jede Seshadri-Kurve von L submaximal ist, d. h. für jede Seshadri-Kurve C von L gilt $U(L, R, x) \subset \text{SG}(C, x)$.

Beweis. Wir führen unsere Betrachtungen auf einem kompakten Querschnitt des Nef-Kegels mit einer affinen Hyperebene wie in Bemerkung 1.1.8 durch. Wir identifizieren den kompakten Querschnitt K als Teilmenge von \mathbb{R}^{g-1} . Wir bezeichnen das zu $v \in K$ assoziierte Geradenbündel mit M_v und fassen die Seshadri-Funktion wie folgt auf:

$$\varepsilon_x : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad v \mapsto \varepsilon(M_v, x).$$

Sei nun M_w das zu L gehörige Geradenbündel, d. h. es gilt $M_w = qL$ für $q \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir schränken ε_x auf die Gerade durch w entlang der i -ten Koordinatenrichtung ein. Wir erhalten also eine reelle konkave Funktion der Form

$$\varepsilon_x : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad t \mapsto \varepsilon(M_{w+(t-w_i)e_i}, x)$$

zusammen mit der konkaven oberen Schranke

$$F : [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad t \mapsto \sqrt[q]{M_{w+(t-w_i)e_i}^q}.$$

Jede Kurve C definiert eine lineare Funktion $\varphi_{C,x}$ auf dem Intervall $[a_i, b_i]$. Da der Schnitt einer Kurve mit einem nef Geradenbündel nicht-negativ ist und nach Voraussetzung $\varepsilon(w_i) \leq R < F(M_w)$ gilt, erfüllt die lineare Funktion $\varphi_{C,x}$ einer Seshadri-Kurve von M_w

$$\varphi_{C,x}(w_i) \leq R \quad \text{und} \quad \varphi_{C,x}(t) \geq 0 \quad \text{für alle } t \in [a_i, b_i].$$

Indem wir alle möglichen Konfigurationen für die linearen Funktionen $\varphi_{C,x}$ betrachten, stellen wir fest, dass die beiden Geraden ℓ_1 und ℓ_2 , welche durch die Punkte $(a_i, 0)$ und (w_i, R) bzw. durch (w_i, R) und $(b_i, 0)$ definiert sind, die größte Einschränkung an das Submaximalitäts-Gebiet der Seshadri-Kurven von M_w stellen. Die nachfolgende Abbildung gibt die Situation exemplarisch wieder.

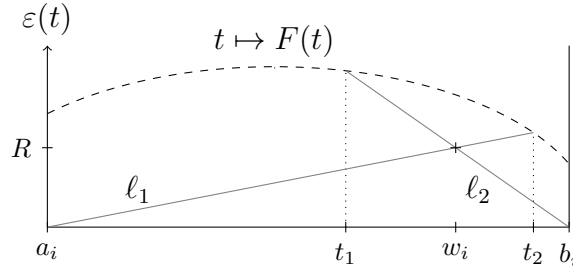


Abb. 1.2: Minimales Intervall (t_1, t_2) auf dem jede Seshadri-Kurve submaximal ist.

Auf diese Weise erhalten wir durch die Betrachtung der i -ten Koordinatenrichtung die beiden Punkte $w - (w_i + t_1)e_i$ und $w - (w_i + t_2)e_i$ in K , wobei jede Seshadri-Kurve auf der Strecke dieser Punkte submaximal ist. Wir führen diese Konstruktion für jede Koordinatenrichtung durch und erhalten $2(\rho-1)$ Punkte. Der von diesen Punkten erzeugte offene und konvexe Unterkegel $U(L, R, x)$ erfüllt die gewünschte Eigenschaft. \square

Bemerkung 1.1.13. Anschließend zeigen wir noch, wie der konstruierte Unterkegel in Prop. 1.1.12 auf verschiedene Weisen verbessert werden kann:

- (i) Durch Hinzunahme von zusätzlichen Geraden durch w lässt sich der konvexe Kegel $U(L, R, x)$ verfeinern. Wendet man dies auf alle Geraden durch w an, so lässt sich das geometrisch wie folgt interpretieren: Wir projizieren zunächst den Rand $\partial K \times \{0\}$ des Querschnitts durch den Punkt (w, R) auf den Funktionsgraph der oberen Schranke $F : K \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt[q]{M_v^q}$. Anschließend projizieren wir diese Menge kanonisch zurück auf $K \times \{0\}$.

- (ii) Jede bekannte Seshadri-Konstante (oder untere Schranke) eines weiteren Geradenbündels L' schränkt die möglichen linearen Funktionen für die Seshadri-Kurven aufgrund der Konkavität der Seshadri-Funktion ein: Sei R' eine untere Schranke für L' . Wir bezeichnen mit M_v und M_w die Geradenbündel von L und L' , welche in K liegen. Wir betrachten die Seshadri-Funktion auf der Gerade durch v und w und bezeichnen mit v_i und w_i die zugehörigen Geradenbündel. Die folgende Graphik zeigt, wie die untere Schranke R' die Grenzfunktion ℓ_1 einschränkt.

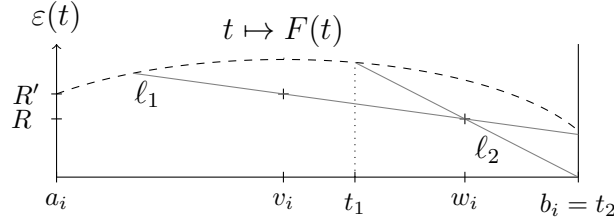


Abb. 1.3: Minimales Intervall (t_1, b_i) auf dem jede Seshadri-Kurve submaximal ist unter Verwendung einer zusätzlichen unteren Schranke.

- (iii) Ähnlich wie in (ii) lässt sich zeigen, dass eine obere Schranke für ein weiteres Geradenbündel L' die linearen Funktionen ℓ_1 und ℓ_2 einschränken können und somit das Intervall vergrößern können. Anders als bei einer zusätzlichen unteren Schranke, kann es jedoch passieren, dass eine zusätzliche obere Schranke keine Einschränkung an die linearen Funktionen liefert. In Abb. 1.1.13 wäre dies der Fall, falls das zugehörige Geradenbündel nahe bei a_i liegen würde.
- (iv) Sei $\tilde{C} = \sum C_i$ eine beliebige submaximale Kurve von L und (a_i, b_i) das Intervall wie im Beweis von Prop. 1.1.12 und $w_i \in (a_i, b_i)$ repräsentiert das Geradenbündel L . Da \tilde{C} für L submaximal ist, liefert \tilde{C} eine obere Schranke für die Seshadri-Konstante. Wir bezeichnen mit $(s_1, s_2) \subset (a_i, b_i)$ das Intervall auf dem \tilde{C} submaximal ist. Dann lässt sich zeigen, dass C submaximal auf dem Intervall (s_1, w_i) oder auf (w_i, s_2) ist. Unter Hinzunahme des Intervalls (t_1, t_2) aus dem Beweis von Prop. 1.1.12 folgt somit, dass C submaximal auf $(s_1, w_i) \cup (t_1, t_2)$ oder auf $(w_i, s_2) \cup (t_1, s_2)$ ist.
- (v) Gilt in (iv) zusätzlich, dass jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt, dann gilt sogar $\text{SG}(\tilde{C}, x) \subset \text{SG}(C, x)$. (Wir werden in Satz 2.2.10 sehen, dass es abelsche Flächen gibt, auf denen jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt.)

1.1.1. Seshadri-Konstanten auf projektiven Flächen

Auf projektiven Flächen S haben wir den Vorteil, dass wir jede Kurve C als effektiven Divisor und jeden effektiven Divisor D als Kurve auffassen können. Somit können wir bei der Existenz von Kurven auf Linearsysteme zurückgreifen. Da uns im Fall von projektiven Flächen mehr Werkzeuge zur Verfügung stehen, werden wir uns von nun an auf projektive Flächen einschränken.

Szemberg zeigte, dass ein nef Geradenbündel L bzgl. eines fixierten Punktes $x \in S$ nur endlich viele submaximale Kurven besitzen kann.

Proposition 1.1.14 ([46, Prop. 1.8]). *Sei S eine glatte projektive Fläche, $L \in \text{Nef}(S)$ und $x \in S$. Dann gibt es höchstens $\rho(S) = \text{rk}(\text{NS}(S))$ irreduzible Kurven $C \subset S$, die für L submaximal in x sind.*

Die endliche Anzahl an submaximalen Kurven liefert uns unmittelbar:

Korollar 1.1.15 ([45, Prop. 4], [47, Lemma 3.1]). *Sei S eine glatte projektive Fläche, $L \in \text{Nef}(S)$ und $x \in S$. Falls $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ gilt, dann besitzt L in x eine Seshadri-Kurve und die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L, x)$ ist rational.*

Mit dem Resultat von Szemberg können wir außerdem eine lokale Strukturaussage über die Seshadri-Funktion treffen, sofern $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ gilt.

Satz 1.1.16. *Sei S eine glatte projektive Fläche, $L \in \text{Nef}(S)$ und $x \in S$. Weiter gelte $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ und sei $1 \leq n \leq \rho(S)$ die Anzahl der Seshadri-Kurven von L in x . Dann gibt es einen offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(S)$ um L , so dass die Seshadri-Funktion in U das Minimum von n linearen Funktionen ist, d. h. es gilt*

$$\varepsilon_x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad L' \mapsto \min \{ \varphi_{C_i, x}(L') \mid i = 1, \dots, n \},$$

wobei C_1, \dots, C_n die Seshadri-Kurven von L in x sind.

Bemerkung 1.1.17. Die Aussage von Satz 1.1.16 gilt unter zusätzlichen Annahmen auch für beliebige projektive Varietäten. Da für Dimension $g \geq 3$ bisher kein Argument bekannt ist, dass es nur endlich viele submaximale bzw. Seshadri-Kurven gibt, müssen wir in diesem Fall zwei zusätzliche Voraussetzungen treffen:

- (i) Es gibt nur endlich viele Seshadri-Kurven C_1, \dots, C_n für L in x .
- (ii) Das Infimum über die Seshadri-Quotienten der verbleibenden Kurven $C \neq C_i$ ist echt größer als die Seshadri-Konstante von L , d. h.

$$\varepsilon(L, x) < \inf \{ \varphi_{C, x}(L) \mid x \in C \subset V \text{ irred. Kurve mit } C \neq C_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}.$$

Beide dieser Eigenschaften sind z.B. unter der stärkeren Voraussetzung erfüllt, dass L in x nur endlich viele submaximale Kurven besitzt.

Beweis von Satz 1.1.16. Nach Prop. 1.1.14 besitzt L endlich viele submaximale Kurven C_1, \dots, C_r . Ohne Einschränkung seien die Kurven C_1, \dots, C_n die Seshadri-Kurven von L . Für eine irreduzible Kurve C , welche keine Seshadri-Kurve ist, erhalten wir eine untere Schranke für den Seshadri-Quotienten von C bzgl. L in x durch

$$r := \min \left\{ \frac{L \cdot C_i}{\text{mult}_x C_i} \mid i = n+1, \dots, r \right\}.$$

Im Fall $n = r$ gibt es keine weiteren submaximalen Kurven und wir setzen $r = \sqrt{L^2}$. Nach Prop. 1.1.4 liefert uns das punktweise Infimum der Familie

$$\mathcal{F}_L = \left\{ \varphi_{C, x} : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R} \mid C \text{ ist irreduzible Kurve durch } x \text{ und } C \neq C_i, i = 1, \dots, n \right\}$$

eine stetige Funktion $\varepsilon_1 : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Funktion hat die Eigenschaft, dass sie für jedes Geradenbündel L' die Seshadri-Konstante berechnet, sofern die Seshadri-Konstante von L' nicht nur von den Kurven C_1, \dots, C_n berechnet wird. Zusätzlich betrachten wir die stetige Funktion

$$\varepsilon_2 : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L' \mapsto \min \{ \varphi_{C_i, x}(L') \mid i = 1, \dots, n \},$$

welche den kleinsten Seshadri-Quotienten der Kurven C_1, \dots, C_n bestimmt. Die Seshadri-Funktion ist somit das punktweise Minimum von ε_1 und ε_2 .

Da ε_1 und ε_2 stetig sind und $\varepsilon_2(L) < \varepsilon_1(L)$ gilt, gibt es eine offene Umgebung V um L , so dass $\varepsilon_2(L') < \varepsilon_1(L')$ für alle $L' \in V$ gilt. Wegen der Homogenität der Seshadri-Funktion, liefert V sogar einen offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(S)$, in dem ε_2 die Seshadri-Konstanten berechnet. \square

Man könnte vermuten, dass die Seshadri-Funktion auch global die Struktur einer stückweisen linearen Funktion besitzt, allerdings werden wir sehen, dass die lokale Struktur im Fall $\varepsilon_x(L) = \sqrt{L^2}$ und daher auch die globale Struktur verblüffend komplex sein kann. Wir werden sehen, dass es abelsche Flächen A mit $\rho(A) = 2$ gibt, auf denen die Seshadri-Funktion eine ähnliche Komplexität wie die Cantor-Funktion besitzt (siehe Bsp. 3.1.7 und Thm. 3.1.13).

Folgendes Hilfsmittel schränkt die Suche nach submaximalen Kurven ein, sofern ein submaximaler Divisor $D \in |\mathcal{O}(kL)|$ existiert:

Proposition 1.1.18 ([3, Lemma 5.2]). *Sei S eine glatte projektive Fläche, L ein amples Geradenbündel und $x \in S$. Sei $\zeta > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so dass es einen Divisor $D \in |\mathcal{O}_S(kL)|$ gibt mit*

$$\frac{L \cdot D}{\text{mult}_x D} \leq \zeta \sqrt{L^2}.$$

Dann ist jede irreduzible Kurve $C \subset X$ mit

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} < \frac{1}{\zeta} \sqrt{L^2}$$

eine Komponente von D .

Falls in der vorherigen Proposition für ein $k \in \mathbb{N}$ ein Divisor $D \in |\mathcal{O}_S(kL)|$ existiert, der (schwach-)submaximal für L ist (d.h. $\zeta = 1$), dann ist jede submaximale Kurve von L eine Komponente von D . Wir werden auf abelschen Flächen sehen, dass wir stets einen solchen Divisor konstruieren können (siehe Prop. 2.1.3 und Lemma 2.1.9). Falls wir einen *irreduziblen* Divisor $D \in |\mathcal{O}_S(kL)|$ finden, welcher submaximal für L ist, dann berechnet D die Seshadri-Konstante und ist sogar die einzige submaximale Kurve für L .

Submaximale ample Kurven berechnen außerdem ihre eigene Seshadri-Konstante:

Proposition 1.1.19 ([7, Prop. 1.2]). *Sei S eine glatte projektive Fläche und $x \in S$. Weiter sei C eine irreduzible ample Kurve, welche submaximal für ein $L \in \text{Nef}(S)$ in x ist. Dann ist C die einzige submaximale Kurve von $\mathcal{O}_S(C)$ in x und berechnet somit die Seshadri-Konstante, d. h.*

$$\varepsilon(\mathcal{O}_S(C), x) = \frac{\mathcal{O}_S(C) \cdot C}{\text{mult}_x C} = \frac{C^2}{\text{mult}_x C} < \sqrt{C^2}.$$

Es zeigt sich, dass C in einem offenen Unterkegel die einzige submaximale Kurve ist:

Korollar 1.1.20. *Sei S eine glatte projektive Fläche und $x \in S$. Weiter sei C eine irreduzible ample Kurve, welche submaximal für ein $L \in \text{Nef}(S)$ in x ist. Dann ist C die einzige submaximale Kurve in einem offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(S)$ um $\mathcal{O}_S(C)$. Insbesondere stimmt die Seshadri-Funktion auf U mit $\varphi_{C,x}$ überein, d. h.*

$$\varepsilon_x(L') = \varphi_{C,x}(L') \quad \text{für alle } L' \in U.$$

Beweis. Die Argumentation folgt einer ähnlichen Konstruktion wie im Beweis von Satz 1.1.16. Wir beginnen damit, dass wir eine untere Schranke für die Seshadri-Quotienten von Kurven $C' \neq C$ konstruieren. Da $C \in |\mathcal{O}_S(C)|$ submaximal und irreduzibel ist, erhalten wir für $\zeta := \frac{\sqrt{C^2}}{\text{mult}_x C}$ und jede andere irreduzible Kurve C' durch x die Ungleichung

$$\frac{\mathcal{O}_S(C) \cdot C'}{\text{mult}_x C'} \geq \frac{1}{\zeta} \sqrt{C^2} = \frac{C^2}{\varepsilon(\mathcal{O}_S(C), x)} > \sqrt{C^2},$$

wobei die letzte Abschätzung aus $\varepsilon(\mathcal{O}_S(C), x) < \sqrt{C^2}$ folgt.

Wir haben somit eine von C' unabhängige untere Schranke $r := \frac{C^2}{\varepsilon(\mathcal{O}_S(C), x)} > \sqrt{C^2}$ für den Seshadri-Quotienten gefunden. Wir betrachten die stetige Funktion $\varepsilon_1 : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch das punktweise Infimum der Familie

$$\mathcal{F}_C = \left\{ \varphi_{C',x} : \text{Nef}(S) \rightarrow \mathbb{R} \mid C' \text{ ist irreduzible Kurve durch } x \text{ und } C' \neq C \right\}$$

definiert ist. Nach der vorherigen Betrachtung gilt $\varepsilon_1(\mathcal{O}_S(C), x) \geq r > \sqrt{C^2}$. Folglich gibt es wegen der Stetigkeit einen offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(S)$, so dass

$$\varepsilon_1(L', x) > \sqrt{L'^2} \quad \text{für alle } L' \in U$$

gilt. Somit muss C die Seshadri-Konstante in U berechnen und für jedes Geradenbündel $L' \in U$ ist C sogar die einzige submaximale Kurve. \square

Die Submaximalitäts-Gebiete liefern uns in Verbindung mit Prop. 1.1.19 ein Kriterium für die Irreduzibilität von Divisoren:

Lemma 1.1.21. *Sei S eine glatte projektive Fläche, $x \in S$ und D ein effektiver ampler Divisor auf S , welcher submaximal für ein $L \in \text{Nef}(S)$ ist, (d.h. $\text{SG}(D, x) \neq \emptyset$). Falls es einen effektiven Divisor D' mit $\text{SG}(D, x) \subsetneq \text{SG}(D', x)$ gibt, dann ist D reduzibel.*

Beweis. Wir nehmen an, dass D irreduzibel sei. Wegen $\text{SG}(D, x) \subsetneq \text{SG}(D', x)$ ist D für kein Geradenbündel die einzige submaximale Kurve. Dies ist allerdings ein Widerspruch zu Prop. 1.1.19. \square

1.2. Seshadri-Konstanten auf Abelschen Flächen

Wir werden uns in dieser Arbeit ausschließlich mit komplexen abelschen Flächen beschäftigen. Für die Grundlage für abelsche Varietäten verweisen wir auf [11]. Wir fassen in diesem Abschnitt die wesentlichen Eigenschaften zusammen, welche für Seshadri-Konstanten von Interesse sind. Auf abelschen Varietäten $V = W/\Lambda$ gibt es folgende drei isomorphe Darstellungen der Néron-Severi-Gruppe bzw. des Néron-Severi-Vektorraums $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V)$:

- Numerische Äquivalenzklassen von Geradenbündel, d. h. $\mathrm{NS}(V) \cong \mathrm{Pic}(V)/\mathrm{Pic}^0(V)$.
- Hermitesche Formen $H : W \times W \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Im}(H)(\Lambda \times \Lambda) \subset \mathbb{Z}$.
- Symmetrische Endomorphismen auf V mit Hilfe des Isomorphismus

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(V), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L,$$

wobei L_0 eine Polarisierung auf V ist.

Somit liefern uns die symmetrischen Endomorphismen Informationen über den Néron-Severi-Vektorraum. Wir werden die Klassifikation von abelschen Flächen anhand ihrer Endomorphismenalgebren angeben und an dieser Klassifikation den aktuellen Forschungsstand von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen darstellen.

Außerdem werden wir allgemeine Eigenschaften von Seshadri-Konstanten und Kurven auf abelschen Flächen zusammentragen und erweitern. Insbesondere werden wir zeigen, dass jede elliptische Kurve auf einer abelschen Fläche die Seshadri-Konstante in einem offenen Unterkegel berechnet.

1.2.1. Endomorphismenalgebra und Klassifikation von abelschen Flächen

Wir geben in diesem Abschnitt die Klassifikation von abelschen Flächen anhand ihrer Endomorphismenalgebren an (siehe [11, Chp. 5] und [42]) und wiederholen die dazu gehörigen Notationen.

Sei $V = W/\Lambda$ eine abelsche Varietät. Wir bezeichnen mit \widehat{V} die zu V duale abelsche Varietät und für einen Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist $\widehat{f} \in \mathrm{End}(\widehat{V})$ der zu f duale Endomorphismus. Jede beliebige Polarisierung $L_0 \in \mathrm{Pic}(V)$ definiert eine Isogenie

$$\phi_{L_0} : V \rightarrow \widehat{V}, \quad x \mapsto t_x^* L - L$$

zwischen V und \widehat{V} , wobei t_x die Translationsabbildung $t_x : V \rightarrow V$, $v \mapsto x + v$ ist. Wir bezeichnen mit $\phi_{L_0}^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\widehat{V}, V)$ die Inverse von ϕ_{L_0} . Die Rosati-Involution bezüglich der Polarisierung L_0 auf der Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ ist durch den Morphismus

$$': \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V) \rightarrow \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V), \quad f \mapsto f' := \phi_{L_0}^{-1} \widehat{f} \phi_{L_0}$$

definiert. Eine besondere Rolle werden die Endomorphismen spielen, welche unter der Rosati-Involution (bzgl. L_0) invariant sind. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(V) := \{ f \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V) \mid f' = f \}$$

die Untergruppe von $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(V)$ der symmetrischen Endomorphismen (bzgl. L_0).

Proposition 1.2.1 ([11, Prop. 5.2.1]). *Sei V eine abelsche Varietät und L_0 eine Polarisierung. Dann ist die Abbildung*

$$\varphi_{L_0} : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(V), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

ein Isomorphismus von \mathbb{Q} -Vektorräumen. Ist zusätzlich L_0 eine Prinzipalpolarisierung, dann ist

$$\varphi_{L_0}|_{\mathrm{NS}(V)} : \mathrm{NS}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(V), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

ein Gruppenisomorphismus.

Die Schnittzahlen von L und L_0 finden sich in den Koeffizienten der analytischen Darstellung des charakteristischen Polynoms von $f = \varphi_{L_0}(L)$ wieder:

Proposition 1.2.2 ([11, Prop. 5.2.3]). *Sei V eine abelsche Varietät der Dimension g und L_0 eine Polarisierung. Sei $f = \varphi_{L_0}(L) \in \mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(V)$ das Bild von $L \in \mathrm{NS}(V)$ und sei*

$$P_f^a(t) = \sum_{\nu=0}^g (-1)^{\nu} a_{\nu} t^{g-\nu}$$

das charakteristische Polynom von f in der analytischen Darstellung. Dann gilt

$$d_0 a_{\nu} = \frac{L_0^{g-\nu} \cdot L^{\nu}}{(g-\nu)! \nu!} \quad \text{für } \nu = 0, \dots, g,$$

wobei d_0 der Grad der Polarisierung L_0 ist.

Klassifikation von abelschen Flächen

Für die Klassifikation von abelschen Flächen anhand ihrer Endomorphismenringe werden wir zwischen einfachen und nicht-einfachen abelschen Flächen unterscheiden. Eine abelsche Varietät V heißt einfach, falls sie nur die trivialen abelschen Untervarietäten 0 und V besitzt.

Theorem 1.2.3 ([11, Poincaré-Reduzibilität, Thm. 5.3.7]). *Sei V eine abelsche Varietät, dann gibt es paarweise nicht-isogene einfache abelsche Varietäten V_i , natürliche Zahlen n_i und eine Isogenie*

$$V \rightarrow V_1^{n_1} \times \dots \times V_r^{n_r}.$$

Die abelschen Varietäten V_i und Zahlen n_i sind bis auf Isogenie und Permutation eindeutig bestimmt.

Folglich ist eine abelsche Fläche entweder einfach oder isogen zu einem Produkt von zwei elliptischen Kurven.

Für einfache abelsche Flächen erhalten wir die folgende Klassifikation (siehe [11, Prop. 5.5.7], [41] und [42]):

Satz 1.2.4 ([11, Prop. 5.5.7], [41], [42]). *Sei A eine einfache abelsche Fläche, dann liegt einer der folgenden Fälle vor:*

$\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong \mathbb{Q}$ und $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}$.	(allgemeiner Fall)
$\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für eine quadratfreie Zahl $d > 0$ und $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^2$.	(reelle Mult.)
$\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{e})$ für quadratfreie Zahlen $d > 0 > e$ und $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^2$.	(komplexe Mult.)
$\text{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong Q_{a,b}$, wobei $Q_{a,b}$ eine indefinite Quaternionenalgebra ist, so dass $a, b \in \mathbb{Q}$ nicht beide negativ sind, und es gilt $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^3$.	(Quaternionenmult.)

Für nicht-einfache abelsche Flächen A zeigt sich (siehe Abschnitt 4.2 für mehr Details), dass die symmetrische Endomorphismenalgebra von der Form

$$\text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(A) \cong \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{\sigma} \\ \sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ und } \sigma \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(E_1, E_2) \right\}$$

ist. Für elliptische Kurven E_1 und E_2 gibt es die folgenden Fälle:

- E_1 und E_2 sind nicht isogen, d. h. $\text{Hom}(E_1, E_2) = 0$,
- E_1 und E_2 sind isogen und besitzen keine komplexe Multiplikation, d. h. $\text{Hom}(E_1, E_2) \cong \mathbb{Z}$ oder
- E_1 und E_2 sind isogen und besitzen komplexe Multiplikation, d. h. $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ist isomorph zu einem Gitter in \mathbb{C} .

Falls E_1 und E_2 nicht isogen sind, folgt $\text{Hom}(E_1, E_2) = 0$ und somit zeigt uns die Darstellung der symmetrischen Endomorphismenalgebra, dass der Néron-Severi-Vektorraum zweidimensional ist, d. h. $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^2$. Sind E_1 und E_2 isogen aber ohne komplexe Multiplikation, so ist $\text{Hom}(E_1, E_2) \cong \mathbb{Z}$ und daher $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^3$. Sind E_1 und E_2 isogen und besitzen komplexe Multiplikation, so ist $\text{Hom}(E_1, E_2)$ isomorph zu einem Gitter in \mathbb{C}^2 und deshalb $\text{NS}(A) \cong \mathbb{Z}^4$. Im Fall, dass E_1 und E_2 komplexe Multiplikation besitzen, lässt sich sogar zeigen, dass A isomorph zu einem Produkt $E'_1 \times E'_2$ ist (siehe [44, Cor. 3.4]).

Forschungsstand: Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen

Bauer gelang es in [3] für jede abelsche Fläche A mit $\rho(A) = 1$ die Seshadri-Konstanten zu berechnen. Dies war bis jetzt der einzige Fall, in dem die Seshadri-Konstanten vollständig verstanden wurden. Darüber hinaus gibt es partielle Ergebnisse für den Fall, dass A ein Produkt von elliptischen Kurven ist. Es ist wohl bekannt, dass auf $E_1 \times E_2$ für zwei nicht isogene elliptische Kurven E_1 und E_2 die Seshadri-Konstante stets von den elliptischen Kurven $E_1 \times \{0\}$ oder $\{0\} \times E_2$ bestimmt wird. Bauer und Schulz untersuchten in [7] Selbstprodukte von elliptischen Kurven, wobei E entweder keine komplexe Multiplikation,

d. h. $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$ oder eine der beiden komplexen Multiplikationen $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ besitzt. In diesem Fall zeigt sich, dass jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve berechnet wird und somit ganzzahlig ist.

Wir wiederholen die in der Einleitung erwähnte tabellarische Darstellung des bisherigen Forschungsstands von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen A :

$\rho(A)$	nicht-einfach	einfach
1	Existiert nicht	Allgemeine abelsche Fläche Bauer (1999)
2	Fall $A = E_1 \times E_2$ E_1 und E_2 nicht isogen (trivialer Fall)	Reelle Multiplikation: Keine Ergebnisse <hr/> Komplexe Multiplikation: Keine Ergebnisse
3	Fall $A = E \times E$ E ohne komplexe Mult. Bauer, Schulz (2008)	Indefinite Quaternionenmult.: Keine Ergebnisse
4	Fall $A = E \times E$ $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ Bauer, Schulz (2008)	Existiert nicht

Wir werden in Kapitel 3 vollständig den Fall $\rho(A) = 2$ behandeln und in Kapitel 4 weitere Teilergebnisse für nicht-einfache abelsche Flächen mit $\rho \geq 3$ erzielen.

1.2.2. Eigenschaften von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen

Wir beschäftigen uns nun mit bereits bekannten Resultaten von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen. Aufgrund der Homogenität von abelschen Varietäten können wir jede Kurve so translatieren, dass ein beliebiger Punkt $x \in C$ auf den Nullpunkt abgebildet wird. Unter dieser Abbildung bleibt sowohl die numerische Klasse von C als auch die Multiplizität erhalten. Also ist die Seshadri-Konstante auf abelschen Varietäten unabhängig von dem gewählten Punkt, d. h. es gilt

$$\varepsilon(L) := \varepsilon(L, 0) = \varepsilon(L, x) \quad \text{für alle } x \in A.$$

Ebenso folgt aufgrund der Homogenität von abelschen Varietäten, dass $\varepsilon(L) \geq 1$ für jedes ample Geradenbündel L gilt, was uns eine globale untere Schranke für die Seshadri-Konstante ampler Geradenbündel liefert. Nakamaye konnte genau charakterisieren, wann der Fall $\varepsilon(L) = 1$ eintritt.

Theorem 1.2.5 ([39, Thm. 1.1]). *Sei A eine abelsche Varietät der Dimension $g \geq 2$. Dann existiert ein ampler Geradenbündel L mit $\varepsilon(L) = 1$ genau dann, wenn $A \cong E \times B$ ist, wobei E eine elliptische Kurve und B eine abelsche Varietät der Dimension $g - 1$ ist.*

Für abelsche Flächen, die nicht isomorph zu einem Produkt von elliptischen Kurven sind, konnte Nakamaye außerdem die folgende globale untere Schranke zeigen:

Satz 1.2.6 ([39, Thm. 1.2]). *Sei A eine abelsche Fläche, welche nicht isomorph zu einem Produkt von elliptischen Kurven ist, und L ein amples Geradenbündel. Dann gilt $\varepsilon(L) \geq \frac{4}{3}$.*

Steffens zeigte mit [45, Prop. 3], dass diese Grenze scharf ist, da jede irreduzible Prinzipalpolarisierung auf einer abelschen Fläche die Seshadri-Konstante $\frac{4}{3}$ besitzt.

1.2.3. Kurven auf abelschen Flächen

Für die Bestimmung der Seshadri-Konstante ist es hilfreich, dass wir wissen, welche Arten von Kurven es auf abelschen Flächen gibt. Der Satz von Riemann-Roch [11, Thm. 3.6.3] zeigt, dass für ein beliebiges Geradenbündel L

$$\chi(L) = \frac{1}{2}L^2$$

gilt. Somit sind die Selbstschnitte von Geradenbündeln auf abelschen Flächen stets gerade. Für eine Kurve C zeigt die Adjunktionsformel

$$p_a(C) = \frac{1}{2}C^2 + 1,$$

dass $C^2 \geq -2$ ist, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $p_a(C) = 0$ ist. Da es auf abelschen Varietäten jedoch keine rationalen Kurven gibt, erhalten wir $C^2 \geq 0$ für jede Kurve C . Im Fall $C^2 = 0$ sehen wir anhand der Adjunktionsformel, dass es sich bei C um eine glatte Kurve von Geschlecht $p_a(C) = 1$ handelt und somit eine elliptische Kurve ist. Wir können die Kurven somit in zwei Klassen unterteilen: Die elliptischen Kurven, d. h. $C^2 = 0$, und die nicht elliptischen Kurven, d. h. $C^2 > 0$.

Bauer und Szemberg konnten eine untere Schranke für den Seshadri-Quotienten für nicht elliptische Kurven konstruieren:

Theorem 1.2.7 ([8, Thm. A.1.]). *Sei A eine abelsche Fläche, L ein amples Geradenbündel und C eine nicht elliptische Kurve. Dann gilt*

$$\varphi_C(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \sqrt{\frac{7}{8}L^2}.$$

Im Folgenden werden wir uns vor allem mit elliptischen Kurven auseinander setzen und die amplen submaximalen Kurven werden wir in Kapitel 2 untersuchen. Kani lieferte in [27] Kriterien zur Bestimmung von elliptischen Kurven auf abelschen Flächen, welche wir nun zusammenfassen.

Proposition 1.2.8 ([27, Prop. 2.1]). *Sei A eine abelsche Fläche und $C_1, C_2 \subset A$ irreduzible Kurven auf A . Dann ist $C_1 \cdot C_2 \geq 0$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn $C_1 = T_x(C_2) = E$ für $x \in A$ und eine elliptische Kurve E gilt.*

Damit folgt für Divisoren:

Korollar 1.2.9 ([27, Cor. 2.2]). *Sei A eine abelsche Fläche.*

- (i) *Für effektive Divisoren $D_1, D_2 \in \text{Div}(A)$ gilt $D_1 \cdot D_2 \geq 0$, wobei Gleichheit genau dann gilt, wenn es eine elliptische Kurve E mit $D_i \equiv n_{ij}T_{x_{ij}}(E)$ für $i = 1, 2$ gibt.*
- (ii) *Für einen beliebigen Divisor $D \in \text{Div}(A)$ gilt $D^2 > 0$ genau dann, wenn D oder $-D$ ample ist.*

Kani zeigte, dass wir sogar anhand der numerischen Klasse feststellen können, ob ein Divisor eine elliptische Kurve ist:

Proposition 1.2.10 ([27, Prop. 2.3]). *Sei A eine abelsche Fläche und $D \in \text{NS}(A)$. Dann gilt $D \equiv mE$ für eine elliptische Kurve E und $m \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $D^2 = 0$ ist. Außerdem gilt $m > 0$ genau dann, wenn für einen amplen Divisor H der Schnitt $D \cdot H$ positiv ist.*

Insbesondere folgt, dass primitive Klassen auf dem Rand des Nef-Kegels genau den Klassen von elliptischen Kurven entsprechen.

Bemerkung 1.2.11. Zur Berechnung der elliptischen Kurven können wir wie folgt vorgehen: Sei S die Schnittmatrix einer amplen Basis B_1, \dots, B_ρ der Néron-Severi-Gruppe. Dann ist $N := \sum_{i=1}^{\rho} a_i B_i$ genau dann die Klasse einer elliptischen Kurve, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Es gilt $\text{ggT}(a_1, \dots, a_\rho) = 1$, d. h. N ist primitiv,
- (ii) für $a := (a_1, \dots, a_\rho)$ ist $aSa^T = 0$, d. h. der Selbstschnitt N^2 verschwindet, und
- (iii) der Schnitt $N \cdot B_1 = aSe_1$ mit dem amplen Geradenbündel B_1 ist positiv.

Für die Bestimmung der elliptischen Kurven auf nicht-einfachen abelschen Flächen wird es also notwendig sein, dass wir die quadratische Form verstehen, welche durch die Schnittmatrix S gegeben ist.

Mit Prop. 1.2.10 können wir eine alternative Verbesserung des Nakai-Moishezon-Kriterium herleiten:

Korollar 1.2.12. *Sei A eine abelsche Fläche und L ein Geradenbündel auf A . Dann ist L ample genau dann, wenn $L \cdot C > 0$ für alle Kurven $C \subset A$ gilt.*

Beweis. Die Hinrichtung folgt offensichtlich aus dem Nakai-Moishezon-Kriterium. Wir nehmen an, es gilt $L \cdot C > 0$ für alle Kurven $C \subset A$. Um mit dem Nakai-Moishezon-Kriterium für projektive Flächen zu folgern, dass L ample ist, müssen wir noch zeigen, dass der Selbstschnitt L^2 positiv ist. Da der Schnitt von L mit jeder Kurve positiv ist, folgt, dass L nef und somit $L^2 \geq 0$ ist. Angenommen es gelte $L^2 = 0$. Dann gibt es nach Prop. 1.2.10 eine elliptische Kurve E und ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $L \equiv mE$ gilt. Dann erhalten wir jedoch $L \cdot E = mE^2 = 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung $L \cdot C > 0$ für alle Kurven C ist. \square

Im Laufe dieser Arbeit werden wir diese Aussage noch weiter verbessern können. Wir werden zeigen, dass es auf nicht-einfachen abelschen Flächen genügt, dass der Schnitt mit allen elliptischen Kurven positiv ist (siehe Satz 4.4.15).

Elliptische Kurven spielen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Seshadri-Konstanten, da elliptische Kurven ihre eigene Seshadri-Konstante bestimmen und sogar die Seshadri-Konstante in einem offenen Unterkegel bestimmen.

Satz 1.2.13. *Sei A eine abelsche Fläche und E eine elliptische Kurve durch 0. Dann gilt:*

- (i) *E berechnet die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(E)$ und E ist die einzige schwach-submaximale Kurve.*
- (ii) *Es gibt einen offenen Unterkegel von $\text{Nef}(A)$, in dem E die Seshadri-Konstante berechnet.*

Beweis. Für die erste Aussage verwenden wir, dass der Selbstschnitt einer elliptischen Kurve verschwindet. Es gilt also $\varepsilon(\mathcal{O}_A(E)) \leq \sqrt{E^2} = 0$ und somit ist jede elliptische Kurve schwach-submaximal und berechnet ihre eigene Seshadri-Konstante. Wegen $E \cdot C > 0$ für jede andere Kurve C durch 0 ist E die einzige schwach-submaximale Kurve.

Für die zweite Aussage zeigen wir, dass es ein amples Geradenbündel gibt, so dass E die einzige submaximale Kurve ist. Folglich berechnet E nach Satz 1.1.16 in einer offenen Umgebung die Seshadri-Konstante. Sei dazu H ein amples Geradenbündel, so dass $(H \cdot E)^2 < H^2$ gilt. (Für ein beliebiges amples Geradenbündel \tilde{H} setze $H := \tilde{H} + (\tilde{H} \cdot E)E$.)

Wir betrachten nun die amples Geradenbündel $H_t := E + tH$ für $t \geq 0$ und schränken die Seshadri-Funktion auf $[0, \infty)$ ein, d. h.

$$\tilde{\varepsilon} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varepsilon(H_t)$$

und betrachten zusätzlich die allgemeine obere Schranke

$$F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sqrt{H_t^2} = \sqrt{2tH \cdot E + t^2H^2}$$

und die linearen Funktionen

$$\varphi_C : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{H_t \cdot C}{\text{mult}_0 C}.$$

Da nach Voraussetzung $(H \cdot E)^2 < H^2$ gilt, ist E für $H_1 = H + E$ submaximal, denn es gilt

$$\varphi_E(1)^2 = (H_1 \cdot E)^2 = (H \cdot E)^2 < H^2 + 2H \cdot E = \left(\sqrt{H_1^2}\right)^2 = F(1)^2.$$

Aufgrund der Konkavität von F ist die elliptische Kurve E submaximal für alle Geradenbündel H_t mit $t \in (0, 1)$ und deshalb existiert nach Prop. 1.1.14 für jedes Geradenbündel H_t mit $t \in (0, 1)$ eine Seshadri-Kurve.

Wir zeigen nun, dass eine Seshadri-Kurve $C \neq E$ von H_s mit $s \in (0, 1)$ ebenfalls submaximal für H_1 ist. Dies impliziert, dass es in $(0, 1)$ maximal ρ verschiedene Seshadri-Kurven geben kann. Da C und E verschiedene Kurven sind und beide durch 0 gehen, erhalten wir $E \cdot C > 0$ und somit gilt

$$\varphi_E(0) = 0 < E \cdot C = H_0 \cdot C = \varphi_C(0).$$

Andererseits gilt $\varphi_C(s) \leq \varphi_E(s)$, da C eine Seshadri-Kurve von H_s ist. Dies hat zur Folge, dass die Steigung von φ_C kleiner als die Steigung von φ_E ist. Also gilt $\varphi_E(1) > \varphi_C(1)$ und somit ist C submaximal für H_1 .

Seien nun C_1, \dots, C_n die Seshadri-Kurven auf $(0, 1)$ und es gelte $C_i \neq E$ für alle Kurven C_i . Die Seshadri-Funktion auf $(0, 1)$ ist also durch das Minimum der n linearen Funktionen gegeben. Da aber $\varphi_{C_i}(0) > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, folgt aus der Stetigkeit der Seshadri-Funktion $\tilde{\varepsilon}(0) > 0$. Dies liefert jedoch einen Widerspruch und E muss eine Seshadri-Kurve auf $(0, 1)$ sein. Insbesondere zeigt dieses Argument auch, dass es ein $t_0 > 0$ gibt, so dass E die einzige submaximale Kurve auf $[0, t_0]$ ist. \square

Bemerkung 1.2.14. Wir verwenden im Beweis von Satz 1.2.13 keine nennenswerten Eigenschaften von abelschen Flächen. Die Konstruktion lässt sich vollständig für glatte projektive Flächen verallgemeinern. Das heißt: Falls $N \subset S$ eine Kurve mit $N^2 = 0$ und $x \in N$ ist, dann berechnet N die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_S(N)$ und es gibt einen offenen Unterkegel von $\text{Nef}(S)$, in dem N die Seshadri-Konstante berechnet.

1.3. Binäre quadratische Formen

Wir haben in Bemerkung 1.2.11 gesehen, dass quadratische Formen auf natürliche Weise bei der Betrachtung von Seshadri-Konstanten auftreten. Da wir uns vor allem mit dem Fall $\rho = 2$ auseinandersetzen werden, handelt es sich in diesem Fall um eine binäre quadratische Form. Eine binäre quadratische Form $Q : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$$(x, y) \mapsto Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wobei die Koeffizienten A, B und C ganzzahlig sind. Wir bezeichnen mit $[A, B, C]$ die oben definierte Form. Eine binäre quadratische Form Q mit $\text{ggT}(A, B, C) = 1$ heißt *primitiv*. Zwei quadratische Formen Q und P sind *äquivalent*, falls ein Basiswechsel $S \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ existiert, so dass $P(x, y) = Q(S(x, y))$ gilt. Die Formen Q und P sind *echt äquivalent*, wenn zusätzlich $\det(S) = 1$ gilt. In der Theorie der binären quadratischen Formen verwendet man für gewöhnlich die *echte Äquivalenz*, da die Äquivalenzklassen von primitiven quadratischen Formen bzgl. einer festen Diskriminante eine Gruppe bilden. In unserem Fall wird es aber genügen, dass wir die normale Äquivalenz verwenden, da wir nur an einer normierten Form interessiert sind.

Die Diskriminante von Q ist $\Delta(Q) := B^2 - 4AC = -4\det(M_Q)$, wobei M_Q die Matrixdarstellung von Q ist. Eine Form Q heißt

- *positiv (bzw. negativ) definit*, wenn $Q(x, y) \stackrel{(<)}{>} 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ gilt.
- *degeneriert*, wenn $Q(x, y) = 0$ für ein $(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ gilt.
- *indefinit*, wenn Q nicht degeneriert ist und es $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{Z}^2$ mit $Q(x_1, y_1) > 0$ und $Q(x_2, y_2) < 0$ gibt.

Für definite Formen können wir das bekannte Hauptminoren-Kriterium verwenden. Das heißt, dass Q positiv-definit ist, wenn $A > 0$ und $\Delta(Q) = -4\det(M_Q) < 0$ gilt. Degenerierte Formen lassen sich wie folgt charakterisieren:

Proposition 1.3.1 ([12, Thm. 1.3.1]). *Sei $Q = [A, B, C]$ eine binäre quadratische Form. Dann ist Q indefinit genau dann, wenn $\Delta(Q) = n^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ gilt.*

Angewandt auf abelsche Flächen bedeutet dies: dass eine abelsche Fläche mit $\rho = 2$ und Schnittmatrix S genau dann elliptische Kurven besitzt, wenn $-\det(S) = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Korollar 1.3.2. *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho(A) = 2$ und S die Schnittmatrix einer beliebigen Basis von $\text{NS}(A)$. Dann ist A genau dann nicht-einfach, wenn $\det(S) = -n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Wir verwenden für degenerierte und indefinite Formen die folgenden Normalformen:

Proposition 1.3.3 ([32, Sec. 4.C]). *Sei Q eine degenerierte binäre quadratische Form mit $\Delta(Q) = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist Q äquivalent zu einer Form $[A, n, 0]$ für ein geeignetes $A \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq A \leq 2n - 1$.*

Proposition 1.3.4 ([36, Prop. 1.6]). *Sei Q eine indefinite binäre quadratische Form. Dann ist Q äquivalent zu einer Form $[A, B, C]$ mit $0 \leq B \leq |A| \leq |C|$ und $AC < 0$.*

Positiv-definite binäre quadratische Formen

Obwohl Schnittmatrizen nach dem Hodge-Index-Satz indefinit sind und somit die zugehörigen quadratischen Formen niemals (positiv) definit sein können, werden binäre positiv-definite quadratische Formen im Fall $\rho = 3$ und $\rho = 4$ bei unseren Betrachtungen vorkommen (siehe Kapitel 4). Wir beginnen damit, dass wir eine Normalform für die quadratische Form definieren.

Definition 1.3.5. Eine positiv-definite quadratische Form $Q = [A, B, C]$ ist reduziert, falls für A, B und C die Ungleichungen $|B| \leq A \leq C$ erfüllt sind und, falls Gleichheit in einer der Ungleichungen gilt, dann gilt zusätzlich $B \geq 0$.

Satz 1.3.6 ([15, Thm. 2.8]). *Jede positiv-definite binäre quadratische Form Q ist echt äquivalent zu einer eindeutigen reduzierten Form. Außerdem existiert ein effektiver Algorithmus um die Matrix $S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ zu bestimmen, so dass $Q \circ S$ reduziert ist.*

Da uns die normale Äquivalenz genügt, folgt also, dass jede positive definite Form äquivalent zu einer Form $[A, B, C]$ mit $0 \leq B \leq A \leq C$ ist.

Eine Zahl n wird von Q *primitiv repräsentiert*, wenn es ein teilerfremdes Paar (x, y) gibt mit $Q(x, y) = n$. Diese Eigenschaft bleibt unter Äquivalenz erhalten. Das Besondere an reduzierten Formen ist, dass die Koeffizienten A und C die kleinsten Zahlen angeben, welche von Q primitiv repräsentiert werden.

Proposition 1.3.7 ([15, (2.9), (2.12)]). *Sei $Q = [A, B, C]$ eine reduzierte positiv-definite binäre quadratische Form, dann gilt:*

$$(i) \quad A \leq \sqrt{\frac{4\det(Q)}{3}}.$$

(ii) *Die kleinsten Werte, welche von Q primitiv repräsentiert werden, sind A und C . Für alle teilerfremden Paare $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ gilt also*

$$Q(1, 0) = A \leq C = Q(0, 1) \leq Q(x, y).$$

Kapitel 2

Pell-Divisoren und submaximale Kurven auf abelschen Flächen

Wir haben bereits gesehen, dass elliptische Kurven eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen spielen. In diesem Kapitel werden wir uns mit ample submaximalen Kurven beschäftigen und wichtige Eigenschaften von diesen Kurven herleiten. Wir werden im ersten Abschnitt die Konstruktion eines sogenannten Pell-Divisor wiederholen, den Bauer in [8] einführte. Für jedes symmetrische ample Geradenbündel L , das keinen quadratischen Selbstschnitt besitzt, existiert ein Divisor $P \in |2kL|$ mit $\text{mult}_0 P \geq 2\ell$, wobei $(\ell, k) \in \mathbb{N}^2$ die minimale Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$ ist. Der wesentliche Vorteil dieses Divisors ist, dass P submaximal für L ist. Falls L einen quadratischen Selbstschnitt besitzt, so liefert uns eine ähnliche Konstruktion einen Divisor $D \in |2L|$, welcher aber im Allgemeinen nur schwach-submaximal für L ist.

Im zweiten Abschnitt werden wir in Theorem 2.2.1 die Kernaussage dieses Kapitels beweisen. Das Resultat stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen ample submaximalen Kurven und Pell-Divisoren her und besagt unter anderem, dass jede submaximale Kurve C einen eindeutigen Pell-Divisor P mit $P = C$ oder $P = 2C$ besitzt, dessen Multiplizität mit der erwarteten Multiplizität $2k$ der Pellischen-Gleichung übereinstimmt. Mit dieser Aussage werden wir auf eine Vielzahl von Eigenschaften schließen können. Eine wesentliche Konsequenz wird sein, dass die Seshadri-Konstanten auf einer abelschen Fläche nur von der Néron-Severi-Gruppe der abelschen Fläche abhängig sind. Es wäre denkbar gewesen, dass andere geometrische Eigenschaften wie z.B. das zugrunde liegende Gitter der Fläche die Seshadri-Konstante beeinflussen, was aber nicht der Fall ist.

Obwohl wir die Pell-Divisoren nicht genau kennen, so können wir die Existenz eines Pell-Divisors nutzen, um eine lineare Funktion zu konstruieren, welche nur von der Pellischen-Gleichung abhängt und in einer Umgebung von L eine Verbesserung der oberen Schranke $L \mapsto \sqrt{L^2}$ darstellt. Durch die Betrachtung dieser verbesserten oberen Schranken wird es uns möglich sein, dass wir ein numerisches Kriterium angeben können, um zu entscheiden, wann eine solche obere Schranke mit der linearen Funktion einer submaximalen Kurve übereinstimmt. Dies wird es uns in Kapitel 3 ermöglichen, dass wir die Seshadri-Konstanten im Fall $\rho(A) = 2$ algorithmisch berechnen können, da wir nur endlich viele dieser oberen Schranken betrachten müssen.

Im letzten Abschnitt zeigen wir exemplarisch, wie wir mit Hilfe eines Pell-Divisors P von L die möglichen Werte von $\varepsilon(L)$ einschränken können, da jede Seshadri-Kurve von L eine Komponente von P ist und diese numerischen Einschränkungen unterliegt.

2.1. Pell-Divisoren

Wir führen in diesem Abschnitt Pell-Divisoren ein, die ein wichtiges Werkzeug zur Bestimmung von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen sind. Bauer zeigte bereits in [3, Thm. 6.1], dass auf abelschen Flächen mit $\rho(A) = 1$ die Seshadri-Konstante eines Geradenbündels L mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$ stets von einem eindeutigen Pell-Divisor von L berechnet wird. Auf abelschen Flächen mit $\rho(A) > 1$ wird die Seshadri-Konstante von L fast niemals von dem Pell-Divisor von L berechnet. Wir werden allerdings sehen, dass im Fall $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ die Seshadri-Konstante entweder von einer elliptischen Kurve oder von einem eindeutigen Pell-Divisor eines amplen Geradenbündels M berechnet wird.

Der Name des Divisors geht auf die sogenannte Pellsche-Gleichung zurück, welche bei der Konstruktion eingeht.

Satz 2.1.1 ([1, Thm. 3.2.1]). *Sei $d \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$. Dann besitzt die sogenannte Pellsche-Gleichung*

$$x^2 - dy^2 = 1$$

unendlich viele ganzzahlige Lösungen. Außerdem gibt es eine eindeutige primitive Lösung $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2$, so dass sich jede andere Lösung $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ wie folgt darstellen lässt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} x_0 & dy_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und es gilt $x_0 \leq |x|$ sowie $y_0 \leq |y|$.

Durch einfache Termumformungen erhalten wir folgende Möglichkeit die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung anhand des Quotienten $\frac{x}{y}$ zu identifizieren.

Lemma 2.1.2. *Sei $d \in \mathbb{N}$ eine Zahl mit $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$. Weiter seien $(a, b), (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$ Lösungen der Pellschen-Gleichung $x^2 - dy^2 = 1$. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:*

- (i) $a \leq \alpha$ und $b \leq \beta$,
- (ii) $a \leq \alpha$ oder $b \leq \beta$,
- (iii) $\frac{a}{b} \leq \frac{\alpha}{\beta}$.

Proposition 2.1.3 ([8, Thm. A.1.]). *Sei A eine abelsche Fläche und L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$. Weiter sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$. Dann gibt es einen symmetrischen Divisor $P \in |2kL|^+$ mit $\text{mult}_0 P \geq 2\ell$ und somit gilt*

$$\varepsilon(L) \leq \frac{L \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \frac{kL^2}{\ell} < \sqrt{1 - \frac{1}{\ell^2}} \sqrt{L^2} < \sqrt{L^2}.$$

Wir nennen einen solchen Divisor P einen Pell-Divisor von L .

Beweis. Wir betrachten die Dimension $h^0(\mathcal{O}_A(2nL))^+$, d. h. den Raum der geraden Schnitte von L . Nach [11, Cor. 4.6.6.] gilt

$$h^0(2nL)^+ = \frac{1}{2}h^0(2nL) + 2 = n^2L^2 + 2.$$

Jeder Divisor $D \in |2nL|^+$ besitzt in jeder Halbperiode eine gerade Multiplizität. Folglich können wir die maximale Anzahl an Bedingungen an $|2nL|^+$ bestimmen, damit ein Divisor $D \in |2nL|^+$ existiert, so dass D in 0 mindestens die Multiplizität $2m$ besitzt:

$$1 + 3 + 5 + \dots (2m - 1) = m^2.$$

Also existiert ein Divisor D mit $\text{mult}_0 D \geq 2m$, falls

$$m^2 + 1 \leq h^0(2nL)^+ = 2 + n^2L^2$$

gilt. Sei nun (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - L^2y^2 = 1$, dann liefert $(m, n) := (\ell, k)$ eine Lösung dieser Ungleichung und somit existiert ein Divisor $D \in |2kL|$ mit $\text{mult}_0 D \geq 2\ell$. \square

Bemerkung 2.1.4. Wir erläutern an dieser Stelle, warum die besondere Wahl von m und n im Beweis von Prop. 2.1.3 als primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - L^2y^2 = 1$ getroffen wird:

- 1.) Sind m und n keine Lösung der Pellschen-Gleichung, d. h. erfüllen sie nur die Ungleichung $m^2 - n^2L^2 < 1$, dann folgt $m^2 - n^2L^2 \leq -1$, da L^2 nach Annahme keine Quadratzahl ist. Somit können wir nicht garantieren, dass der resultierende Divisor D submaximal ist, denn es gilt

$$\frac{L \cdot D}{\text{mult}_0 D} \leq \frac{nL^2}{m} \quad \text{und} \quad \frac{nL^2}{m} \geq \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} \sqrt{L^2} > \sqrt{L^2}.$$

- 2.) Die Bedingung, dass L primitiv ist oder dass es sich bei m und n um die primitive Lösung handelt, ist nicht zwingend erforderlich, um die Existenz eines submaximalen Divisors zu garantieren: Sei $L' = rL$ ein Vielfaches eines primitiven amplen Geradenbündels L und $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ eine beliebige Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - (rL)^2y^2 = 1$. Dann gibt es einen Divisor $P' \equiv 2rnL$ mit $\text{mult}_0 P' \geq 2m$. Allerdings liefert die durch den Divisor P' resultierende Abschätzung

$$\varepsilon(rL) \leq \frac{rL \cdot P'}{\text{mult}_0 P'} \leq \frac{nr^2L^2}{m} < \sqrt{r^2L^2}$$

eine schlechtere obere Schranke für die Seshadri-Konstante als ein Pell-Divisor P von L , denn es gilt

$$\frac{rL \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \frac{rkL^2}{\ell} = \frac{rL^2}{\sqrt{L^2 + \frac{1}{k^2}}} \stackrel{(*)}{\leq} \frac{rL^2}{\sqrt{L^2 + \frac{1}{r^2n^2}}} = \frac{nr^2L^2}{m},$$

wobei in $(*)$ genau dann Gleichheit gilt, wenn $r = 1$ und (m, n) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung ist.

Wir können diese Konstruktion in Hinblick auf Seshadri-Konstanten für jedes ample Geradenbündel mit nicht quadratischem Selbstschnitt verwenden, denn wir können ohne Einschränkung annehmen, dass L symmetrisch ist:

Lemma 2.1.5 ([11, Lemma 4.6.2]). *Sei A eine abelsche Fläche und L ein Geradenbündel auf A . Dann gibt es ein zu L numerisch äquivalentes Geradenbündel L_s , welches symmetrisch ist.*

Durch die Existenz eines submaximalen Pell-Divisors können wir auf abelschen Flächen die Frage der Rationalität von Seshadri-Konstanten beantworten:

Korollar 2.1.6 ([8, Cor. A.2.]). *Die Seshadri-Konstante eines nef Geradenbündels auf einer abelschen Fläche ist rational.*

Da wir nicht nur Seshadri-Konstanten von einzelnen Geradenbündeln, sondern die gesamte Seshadri-Funktion betrachten wollen, wird es hilfreich sein, den Begriff von Pell-Divisoren auf nicht primitive \mathbb{Q} -Geradenbündel auszuweiten:

Definition 2.1.7. Sei A eine abelsche Fläche. Sei M ein beliebiges amples \mathbb{Q} -Geradenbündel mit $\sqrt{M^2} \notin \mathbb{Q}$. Sei M_0 ein primitives amples und symmetrisches Geradenbündel, so dass $M \equiv qM_0$ gilt für ein $q \in \mathbb{Q}^+$. Wir definieren die Pell-Divisoren von M als die Pell-Divisoren von M_0 .

Wir können auf die Pell-Divisoren Prop. 1.1.18 anwenden: Da ein Pell-Divisor P im Linearsystem $|2kL|$ liegt, folgt, dass jede submaximale Kurve von L eine Komponente von P ist. Man könnte daher hoffen, dass diese Tatsache die Berechnung der Seshadri-Konstante bzw. der Seshadri-Kurve von L ermöglicht. Allerdings sind Pell-Divisoren im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt und ebenso sind die Komponenten des Pell-Divisors sowie die genaue Multiplizität nicht bekannt. Aus diesem Grund und der Tatsache, dass die primitive Lösung (ℓ, k) der Pellschen-Gleichung beliebig groß werden kann, ist es im Allgemeinen unmöglich eine explizite Zerlegung eines Pell-Divisors zu bestimmen. Dennoch eröffnet dieser Ansatz die Möglichkeit, dass wir die möglichen Werte der Seshadri-Konstante stark einschränken können. Unter Verwendung der noch folgenden Aussagen können wir die Seshadri-Konstante sogar auf endlich viele rationale Werte einschränken (siehe Abschnitt 2.4).

Obwohl wir die genaue Struktur des Pell-Divisors im Allgemeinen nicht kennen, so können wir jedoch ausnutzen, dass die Existenz eines solchen Divisors eine obere Schranke für die Seshadri-Konstante liefert:

Definition 2.1.8. Sei A eine abelsche Fläche und L ein primitives amples und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$ und sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$. Dann nennen wir die lineare Funktion

$$\pi_L : \text{NS}_{\mathbb{R}}(A) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad L' \mapsto \frac{L' \cdot (kL)}{\ell}$$

Pell-Schranke von L .

Wir betrachten als nächstes den Fall $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$. Mit einer ähnlichen Konstruktion wie in Prop. 2.1.3 können wir die Existenz eines Divisors zeigen, welcher schwach-submaximal ist. Wir können die Submaximalität nicht garantieren, da die Pellsche Gleichung in diesem Fall nur die trivialen Lösungen besitzt.

Lemma 2.1.9. *Sei A eine abelsche Fläche und L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Divisor $P \in |2L|^+$ mit $\text{mult}_0 P \geq 2\sqrt{L^2}$ und es gilt*

$$\varepsilon(L) \leq \frac{L \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \sqrt{L^2}.$$

Die Existenz eines Pell-Divisors bzw. eines schwach-submaximalen Divisors beantwortet für abelsche Flächen die Frage nach der Existenz von Seshadri-Kurven:

Korollar 2.1.10. *Sei A eine abelsche Fläche, dann existiert für jedes nef Geradenbündel eine Seshadri-Kurve.*

Obwohl der Divisor P aus Lemma 2.1.9 nur schwach-submaximal ist, liefert dieser Divisor eine obere Schranke im Fall $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$:

Korollar 2.1.11. *Sei A eine abelsche Fläche und L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$. Dann gilt entweder*

$$\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \quad \text{oder} \quad \varepsilon(L) \leq \frac{2L^2 - 1}{2\sqrt{L^2}} < \sqrt{L^2}.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ gelte. Sei nun $P \in |2L|^+$ ein Divisor mit $\text{mult}_0 P \geq 2\sqrt{L^2}$. Nach Prop. 1.1.18 ist jede submaximale Kurve C eine Komponente von P und somit gilt $L \cdot C \leq L \cdot P = 2L^2$. Da nun der Zähler des Seshadri-Quotienten von C beschränkt ist, gilt

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \in \left\{ \frac{a}{b} \in \left[1, \sqrt{L^2}\right) \mid 1 \leq a \leq 2L^2, a, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

Diese Menge ist jedoch nach oben durch $\frac{2L^2-1}{2\sqrt{L^2}}$ beschränkt und somit folgt die Behauptung. \square

Wie bei Pell-Divisoren können wir die Konstruktion von Lemma 2.1.9 und die Aussage von Korollar 2.1.11 auch auf beliebige ample \mathbb{Q} -Geradenbündel L mit $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Q}$ erweitern.

2.2. Einschränkungen für submaximale Kurven

Die folgenden Aussagen zeigen, dass submaximale ample Kurven auf abelschen Flächen sehr starken Einschränkungen unterliegen, und diese werden ausschlaggebend bei der Betrachtung von Seshadri-Konstanten und Seshadri-Kurven auf abelschen Flächen sein. Im Fall $\rho = 2$ werden diese Ergebnisse es uns ermöglichen, dass wir alle Seshadri-Konstanten und die zugehörigen Seshadri-Kurven algorithmisch bestimmen können (siehe Kap. 3).

Wir verfeinern die von Bauer verwendete Methode im Beweis von [3, Thm. 6.1] und erhalten für submaximale Kurven einen starken Zusammenhang zu Pell-Divisoren. Außerdem werden wir erstmals sehen, dass es auch im Fall $\rho > 1$ möglich ist, dass es Geradenbündel mit einem eindeutigen Pell-Divisor gibt und wir in diesen Fällen den Pell-Divisor und somit die Seshadri-Konstante genau bestimmen können.

Theorem 2.2.1. *Sei A eine abelsche Fläche und C eine irreduzible submaximale Kurve auf A . Wir setzen $m = \text{mult}_0 C$ und erhalten entweder*

$$C^2 - m^2 = -1 \quad \text{oder} \quad C^2 - m^2 = -4.$$

Falls C ample (d. h. nicht elliptisch bzw. $m \geq 3$) ist, gilt präziser: Sei M das primitive ample Geradenbündel mit $\mathcal{O}_A(C) = pM$ für $p \in \mathbb{N}$, dann ist $\sqrt{M^2}$ irrational. Weiter sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - M^2 y^2 = 1$, dann gilt:

- (i) *Falls $C^2 - m^2 = -1$ ist, dann ist $2C$ der einzige Pell-Divisor von M und es gilt $(\ell, k) = (m, p)$.*
- (ii) *Falls $C^2 - m^2 = -4$ ist, dann ist C der einzige Pell-Divisor von M und es gilt $(2\ell, 2k) = (m, p)$. In diesem Fall ist der Nullpunkt die einzige Halbperiode, die auf C liegt.*

In beiden Fällen ist 0 der einzige singuläre Punkt von C .

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $C^2 = m^2 - 1$ oder $C^2 = m^2 - 4$ gilt. Dieser Teil der Aussage findet sich im Beweis von [3, Thm. 6.1] wieder. Der Vollständigkeit wegen führen wir die wesentlichen Punkte der Konstruktion an dieser Stelle nochmal aus.

Offensichtlich ist die Behauptung wahr, falls C eine elliptische Kurve ist. Wir nehmen daher an, dass C keine elliptische Kurve und somit ample ist. Da C submaximal für ein amplex Geradenbündel L ist, berechnet C nach Prop. 1.1.19 die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(C)$ und ist sogar die einzige submaximale Kurve. Wir bezeichnen mit $\iota : A \rightarrow A$ die (-1) -Involution auf A . Die Kurve ι^*C ist numerisch äquivalent zu C und besitzt im Nullpunkt die gleiche Multiplizität. Also ist die Kurve ι^*C ebenfalls submaximal für $\mathcal{O}_A(C)$ und muss daher mit C übereinstimmen, da C die einzige submaximale Kurve von $\mathcal{O}_A(C)$ ist. Wir haben damit gezeigt, dass die Kurve C symmetrisch ist.

Wir betrachten nun die Aufblasung $f : \tilde{A} \rightarrow A$ in den 16 Halbperioden $0 = e_1, \dots, e_{16}$ zusammen mit der Projektion $\pi : \tilde{A} \rightarrow K$ auf die glatte Kummerfläche K von A . Da $C \subset A$ irreduzibel und symmetrisch ist, steigt die eigentlich Transformierte

$$C' = f^*C - \sum_{i=1}^{16} \text{mult}_{e_i}(C) \cdot E \subset \tilde{A}$$

von C zu einer irreduziblen Kurve $\bar{C} \subset K$ herab. Bauer zeigte in [3, Thm. 6.1] mit Riemann-Roch, dass \bar{C} eine (-2) -Kurve ist. Die Multiplizitäten $m_i = \text{mult}_{e_i}(C)$ in den 16 Halbperioden erfüllen die Gleichung

$$C^2 - \sum_{i=1}^{16} m_i^2 = (C')^2 = (\pi^*\bar{C})^2 = 2(\bar{C})^2 = -4. \quad (2.1)$$

Andererseits gilt

$$C^2 - m_1^2 < 0, \quad (2.2)$$

da ansonsten die Kurve C wegen

$$\frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{\sqrt{L^2 \cdot C^2}}{m_1} \geq \frac{m_1 \sqrt{L^2}}{m_1} = \sqrt{L^2}$$

nicht submaximal für L ist. Wegen der Gleichungen (2.1) und (2.2) folgt

$$C^2 - m_1^2 \in \{-1, -2, -3, -4\}.$$

Wir behaupten, dass sogar

$$C^2 - m_1^2 = -1 \quad \text{oder} \quad C^2 - m_1^2 = -4 \quad (2.3)$$

gilt. Wir nehmen an, es gelte $C^2 - m_1^2 = -2$. Aus (2.3) folgt $\sum_{i=2}^{16} m_i^2 = 2$ und daher gibt es genau zwei Halbperioden, in denen C die Multiplizität 1 besitzt. Die Gleichung $C^2 - m_1^2 = -2$ impliziert, dass die Multiplizität von C in m_1 gerade ist. Insgesamt besitzt C somit genau 2 Halbperioden mit ungerader Multiplizität. Das ist jedoch unmöglich, da ein symmetrischer Divisor nur 4, 6, 10 oder 12 Halbperioden mit ungerader Multiplizität besitzen kann (siehe [37, Sec. 2, Cor. 3] oder [11, Prop. 4.7.5]). In dem verbleibenden Fall $C^2 - m_1^2 = -3$ ist m_1 ungerade und wegen $\sum_{i=2}^{16} m_i = 1$ gibt es genau eine weitere Halbperiode mit ungerader Multiplizität. Dies liefert uns ebenfalls einen Widerspruch, da symmetrische Divisoren nicht genau 2 Halbperioden mit ungerader Multiplizität besitzen können. Außerdem folgt, dass m_1 die einzige singuläre Halbperiode von C ist. Die Adjunktionsformal auf K zeigt

$$p_a(\bar{C}) = 1 + \frac{1}{2}\bar{C}^2 = 0,$$

und daher ist \bar{C} ein glatter \mathbb{P}^1 auf K . Also kann C auch außerhalb der Halbperioden keine Singularitäten besitzen. Damit haben wir den ersten Teil der Aussage bewiesen.

Wir schreiben $\mathcal{O}_A(C) = pM$ für ein primitives amples und symmetrisches Geradenbündel M und $p > 0$. Aus der Gleichung (2.3) folgt, dass C^2 keine Quadratzahl ist, und daher ist $\sqrt{M^2}$ irrational. Im Fall $C^2 - m_1^2 = -1$ ist das Paar (m_1, p) eine Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - M^2 y^2 = 1$. Wegen der Minimalität der Lösung (ℓ, k) gilt $m_1 \geq \ell$ und $p \geq k$. Da C die Seshadri-Konstante von M berechnet, erhalten wir für einen beliebigen Pell-Divisor $P \in |2kM|$ von M die Ungleichungen

$$\varepsilon(M) = \frac{M \cdot C}{m_1} = \frac{pM^2}{m_1} \leq \frac{M \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \frac{M \cdot P}{2\ell} = \frac{kM^2}{\ell}.$$

Dies liefert $\frac{p}{m_1} \leq \frac{k}{\ell}$ und mit Lemma 2.1.2 folgt $p \leq k$ und $m_1 \leq \ell$. Also gilt $(m_1, p) = (\ell, k)$ und $P = 2C$ wie behauptet. Im Fall $C^2 - m_1^2 = -4$ ist m_1 gerade. In diesem Fall sind die Multiplizitäten in den Halbperioden alle gerade, da $m_i = 0$ für $i = 2, \dots, 16$ gilt. Dies impliziert, dass $\mathcal{O}_A(C)$ total symmetrisch ist und sich somit als gerades Vielfaches eines anderen Geradenbündels schreiben lässt (siehe [37, Sect. 2, Cor. 4]). Also ist p gerade und das Paar $(\frac{m_1}{2}, \frac{p}{2})$ ist eine Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - M^2 y^2 = 1$. Wegen der Minimalität der Lösung (ℓ, k) gilt $\frac{m_1}{2} \geq \ell$ und $\frac{p}{2} \geq k$. Da C jedoch eine Komponente von jedem Pell-Divisor $P \in |2kM|$ nach Prop. 1.1.18 ist, folgt $p = 2k$ sowie $m = 2\ell$. Also gilt in diesem Fall $P = C$. \square

Bevor wir diskutieren, welche neuen Resultate dieses Theorem impliziert, beenden wir zunächst den Beweis für die ursprüngliche Aussage von Bauer, in der die Frage nach Seshadri-Konstanten im Fall $\rho(A) = 1$ vollständig beantwortet wird:

Korollar 2.2.2 ([3, Thm. 6.1]). *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho(A) = 1$ und sei L ein ample symmetrischer Erzeuger der Néron-Severi-Gruppe, d. h. $\text{NS}(A) = \mathbb{Z} \cdot L$. Dann gilt:*

- (i) *Falls $\sqrt{L^2}$ rational ist, dann gilt $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$.*
- (ii) *Falls $\sqrt{L^2}$ irrational ist, dann gilt*

$$\varepsilon(L) = \frac{kL^2}{\ell},$$

wobei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$ ist und für die Seshadri-Kurve gilt entweder

$$C \in |kL| \quad \text{und} \quad \text{mult}_0 C = \ell$$

oder

$$C \in |2kL| \quad \text{und} \quad \text{mult}_0 C = 2\ell.$$

Beweis. Sei C eine Seshadri-Kurve von L . Da es auf abelschen Flächen mit $\rho(A) = 1$ keine elliptischen Kurven gibt, ist C ample. Daher gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass $\mathcal{O}_A(C) \equiv pL$ gilt. Falls C submaximal ist, dann folgt mit Thm. 2.2.1, dass $\sqrt{L^2}$ keine rationale Zahl ist. Sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$, dann ist C oder $2C$ der eindeutige Pell-Divisor von $\mathcal{O}_A(C)$ und es gilt entweder $\ell = \text{mult}_0 C$ und $k = p$ oder $2\ell = \text{mult}_0 C$ und $2k = p$. Folglich gilt

$$\varepsilon(L) = \frac{1}{p} \cdot \varepsilon(\mathcal{O}_A(C)) = \frac{1}{p} \cdot \frac{\mathcal{O}_A(C) \cdot C}{\text{mult}_0 C} = \frac{pL^2}{\text{mult}_0 C} = \frac{kL^2}{\ell}.$$

Falls $\sqrt{L^2}$ rational ist, dann kann es keine submaximale Kurve auf A geben, da diese implizieren würde, dass $\sqrt{L^2}$ irrational ist. Somit gilt $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$. \square

Im Folgenden werden wir genauer auf die Aussage von Theorem. 2.2.1 und dessen unmittelbaren Konsequenzen eingehen:

Bemerkung 2.2.3.

- 1.) Wir erhalten ein numerisches notwendiges Kriterium für submaximale Kurven, da für jede submaximale Kurve C entweder $C^2 = m^2 - 1$ oder $C^2 = m^2 - 4$ für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gilt. Im Fall $C^2 = m^2 - 1$ muss m ungerade sein und im Fall $C^2 = m^2 - 4$ muss $m \equiv 2 \pmod{4}$ gelten, da $\mathcal{O}_X(C)$ ein gerades Vielfaches eines Geradenbündels L ist und somit $C^2 \equiv 0 \pmod{8}$ gilt.
- 2.) Der Pell-Divisor einer submaximalen Kurve C ist eindeutig und entspricht entweder C oder $2C$. Außerdem stimmt die erwartete Multiplizität 2ℓ der Pellischen-Gleichung mit der tatsächlichen Multiplizität des Pell-Divisors überein. Insbesondere stimmt die lineare Funktion φ_C mit der Pell-Schranke $\pi_{\mathcal{O}_A(C)}$ überein. Wir werden in Prop. 2.3.1 zeigen, dass eine lineare Funktion φ_C genau dann mit einer Pell-Schranke π_L übereinstimmt, wenn L ein rationales Vielfaches von $\mathcal{O}_A(C)$ ist.

- 3.) Bei der Bestimmung von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen lassen sich die Kurven in elliptische und ample Kurven aufteilen:

$$\varepsilon(L) = \min \left\{ \varepsilon_{\text{amp}}(L), \varepsilon_{\text{ell}}(L), \sqrt{L^2} \right\},$$

wobei $\varepsilon_{\text{amp}}(L)$ das Infimum über alle submaximalen amplen Kurven und $\varepsilon_{\text{ell}}(L)$ das Infimum über alle elliptischen Kurven ist. In dieser Situation besagt 2.):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{amp}}(L) &= \inf \left\{ \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \mid C \subset A \text{ irreduzible submax. ample Kurve durch } 0 \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{L \cdot kM}{\ell} \mid \begin{array}{l} M \text{ primitiv und ample mit } \sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z} \text{ und} \\ (\ell, k) \text{ primitive Lösung von } x^2 - M^2 y^2 = 1 \end{array} \right\} \\ &= \inf \left\{ \pi_M(L) \mid M \text{ primitiv und ample mit } \sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

Es deutet sich hier bereits an, dass die minimalen Pell-Schranken genau den amplen submaximalen Seshadri-Kurven entsprechen (siehe Kor. 2.3.3).

- 4.) Ist C eine submaximale Kurve mit $C^2 = m^2 - 1$ bzw. $C^2 = m^2 - 4$, dann folgt

$$\varepsilon(\mathcal{O}_A(C)) = \frac{m^2 - 1}{m} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon(\mathcal{O}_A(C)) = \frac{m^2 - 4}{m}.$$

Also ist die Seshadri-Konstante einer submaximalen *amplen* Kurve ($m \geq 3$) niemals ganzzahlig, d. h. $\varepsilon(\mathcal{O}_A(C)) \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. Wir werden damit zeigen (siehe Kapitel 4), dass die Seshadri-Konstanten auf einer abelschen Fläche A für alle ample Geradenbündel genau dann ganzzahlig sind, wenn es keine submaximalen amplen Kurven auf A gibt. Es wird sich sogar zeigen, dass in diesem Fall die Seshadri-Konstante stets von einer elliptische Kurve berechnet wird (siehe Thm. 4.1.3). Wir werden in Kapitel 4 untersuchen, auf welchen abelschen Flächen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind.

Eine interessante Konsequenz von Bem. 2.2.3 3.) ist, dass die Seshadri-Konstanten nur von den Eigenschaften der Schnittmatrix und der Lage des Nef-Kegels abhängig sind. Beide Informationen sind vollständig durch eine Basis der Néron-Severi-Gruppe gegeben und somit hängt die Seshadri-Konstante nur von der Néron-Severi-Gruppe ab. Es wäre beispielsweise denkbar, dass die Seshadri-Konstante von dem zugrunde liegenden Gitter der abelschen Fläche abhängt, aber dies ist nicht der Fall.

Theorem 2.2.4. *Seien X und Y zwei (nicht notwendig isomorphe) abelsche Flächen vom selben Rang ρ . Weiter seien (B_1, \dots, B_ρ) und (B'_1, \dots, B'_ρ) Basen von $\text{NS}(X)$ und $\text{NS}(Y)$, so dass diese Basen dieselbe Schnittmatrix besitzen und sie im Néron-Severi-Vektorraum den gleichen Nef-Kegel erzeugen (beispielsweise falls zusätzlich alle B_i und B'_i ample sind). Dann stimmen die Seshadri-Funktionen unter dem kanonischen Isomorphismus $\text{Nef}(X) \cong \text{Nef}(Y)$ überein, d. h. $\varepsilon_X = \varepsilon_Y$.*

Beweis. Die Zerlegung der Seshadri-Konstante in Bem. 2.2.3 (3.) zeigt, dass wir die Seshadri-Funktion als Minimum der Funktionen ε_{ell} , ε_{amp} und $L \mapsto \sqrt{L^2}$ darstellen können. Da die elliptischen Kurven nach Bem. 1.2.11 aus numerischen Bedingungen an die Schnittmatrix konstruierbar sind und die Pell-Schranken ebenfalls rein numerisch konstruiert werden, folgt, dass die Seshadri-Funktionen unter dem kanonischen Isomorphismus $\text{Nef}(X) \cong \text{Nef}(Y)$ übereinstimmen. \square

Das gleiche Argument lässt sich sogar auf submaximale Kurven anwenden:

Korollar 2.2.5. *Sei A eine abelsche Fläche und $\varphi : \text{NS}(A) \rightarrow \text{NS}(A)$ eine Isometrie bzgl. des Schnittproduktes, welche den Nef-Kegel invariant lässt. Dann gilt:*

(i) *Die Seshadri-Funktion ist invariant unter φ , d. h.*

$$\varepsilon(L) = \varepsilon(\varphi(L)) \quad \text{für alle } L \in \text{Nef}(A).$$

(ii) *Ist C eine irreduzible submaximale Kurve, dann gibt es eine irreduzible submaximale Kurve C' , so dass $C' \equiv \varphi(\mathcal{O}_A(C))$ mit $\text{mult}_0 C' = \text{mult}_0 C$.*

Als nächstes zeigen wir, wie sich zwei Kurven schneiden, wenn sie für ein gemeinsames Geradenbündel submaximal sind:

Satz 2.2.6. *Sei A eine abelsche Fläche und seien C_1 und C_2 zwei irreduzible Kurven, die für ein gemeinsames Geradenbündel $L \in \text{Nef}(A)$ submaximal sind, d. h.*

$$\frac{L \cdot C_i}{\text{mult}_0 C_i} < \sqrt{L^2} \quad \text{für } i = 1, 2.$$

Dann gilt

$$C_1 \cdot C_2 = \text{mult}_0 C_1 \cdot \text{mult}_0 C_2.$$

Insbesondere schneiden sich C_1 und C_2 nur im Ursprung, und ihre Tangential-Kegel besitzen keine gemeinsame Komponente.

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass L ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel ist, da die Kurven C_1 und C_2 in einer gemeinsamen offenen Umgebung von L submaximal sind und wir in dieser Umgebung auch ample \mathbb{Q} -Geradenbündel finden.

Wir betrachten die Aufblasung $f : Y = \text{Bl}_0(A) \rightarrow A$ und sei E der exzeptionelle Divisor und $C'_i \subset Y$ die eigentlich Transformaten von C_i . Wir betrachten für rationale Zahlen $t < \sqrt{L^2}$ den \mathbb{Q} -Divisor

$$B := f^*L - tE.$$

Wir zeigen zunächst, dass B ein big Divisor ist. Der Divisor B erfüllt $B^2 = L^2 - t^2 > 0$ und $B \cdot F^*L = L^2 > 0$. Da die Ungleichungen eine offene Bedingung darstellen, erfüllt auch der \mathbb{Q} -Divisor $B - \lambda H$ diese Ungleichungen, wobei H ein ample Divisor auf Y und λ eine rationale Zahl mit $0 < \lambda \ll 1$ ist. Es folgt mit [22, Cor. 1.8], dass $n(B - \lambda H)$ für $n \gg 0$ linear äquivalent zu einem effektiven Divisor D ist. Insbesondere gilt daher $nB \equiv D + n\lambda H$ und somit ist B nach [35, Cor. 2.2.7] ein big Divisor.

Wir setzen $m_i := \text{mult}_0 C_i$. Falls wir nun t so wählen, dass

$$\max \left\{ \frac{L \cdot C_1}{m_1}, \frac{L \cdot C_2}{m_2} \right\} < t < \sqrt{L^2}$$

gilt, dann gilt für das Schnittprodukt von B und C'_i

$$B \cdot C'_i = (f^*L - tE) \cdot (f^*C_i - m_iE) = L \cdot C_i - tm_i < 0.$$

Folglich sind die beiden Kurven C'_1 und C'_2 in der negativen Komponente der Zariski-Zerlegung von B enthalten (siehe [35, Thm. 2.3.19]) und daher ist ihre Schnittmatrix negativ definit. Die Determinante der Schnittmatrix liefert $C_1'^2 \cdot C_2'^2 - (C'_1 \cdot C'_2)^2 > 0$ und somit

$$(C_1^2 - m_1^2)(C_2^2 - m_2^2) > (C_1 \cdot C_2 - m_1m_2)^2. \quad (2.4)$$

Wir wissen nach Thm 2.2.1, dass $C_i^2 - m_i^2$ entweder -1 oder -4 ist. Wir betrachten daher die möglichen Fälle: Falls $C_1^2 - m_1^2 = C_2^2 - m_2^2 = -1$ ist, dann impliziert die Ungleichung (2.4) bereits $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 = 0$. Falls $C_1^2 - m_1^2 = -4$ und $C_2^2 - m_2^2 = -1$ gilt, dann liefert (2.4) zusammen mit der Schnittungleichung $C_1 \cdot C_2 \geq m_1m_2$ die Ungleichungen

$$0 \leq C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 < 2,$$

und somit gilt $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 \in \{0, 1\}$. Außerdem zeigt Thm 2.2.1: Im Fall $C_1^2 - m_1^2 = -4$ ist m_1 gerade und es gibt ein Geradenbündel B_1 mit $O_A(C_1) = 2B_1$. Daher ist $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2$ durch 2 teilbar und somit erhalten wir $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 = 0$. Abschließend betrachten wir den Fall $C_i^2 - m_i^2 = -4$. In dieser Situation liefert (2.4) die Ungleichung

$$0 \leq C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 < 4,$$

und somit gilt $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$. In dieser Situation sind m_1 und m_2 gerade und es gibt Geradenbündel B_1 und B_2 mit $C_i \equiv 2B_i$. Daher ist $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2$ durch 4 teilbar und somit folgt $C_1 \cdot C_2 - m_1m_2 = 0$, wie behauptet. \square

Korollar 2.2.7. *Sei A eine abelsche Fläche und weiter seien C_1 und C_2 irreduzible Kurven. Dann sind C_1 und C_2 genau dann für ein gemeinsames Geradenbündel L submaximal, wenn C_1 und C_2 gemeinsam submaximal für $\mathcal{O}_A(C_1 + C_2)$, $\mathcal{O}_A(2C_1 + C_2)$ oder $\mathcal{O}_A(C_1 + 2C_2)$ sind.*

Beweis. Explizite Rechnungen unter Verwendung von Satz 2.2.6 zeigen:

- Falls $C_i^2 = m_i^2 - 1$ oder $C_i^2 = m_i^2 - 4$ für $i = 1, 2$ gilt, dann sind C_1 und C_2 submaximal für $\mathcal{O}_A(C_1 + C_2)$.
- Falls $C_1^2 = m_1^2 - 1$ und $C_2^2 = m_2^2 - 4$ gilt, dann sind C_1 und C_2 submaximal für $\mathcal{O}_A(2C_1 + C_2)$.
- Falls $C_1^2 = m_1^2 - 4$ und $C_2^2 = m_2^2 - 1$ gilt, dann sind C_1 und C_2 submaximal für $\mathcal{O}_A(C_1 + 2C_2)$.

\square

Die Bedingung in Satz 2.2.6 liefert uns außerdem eine numerische Methode um zu prüfen, ob es im Submaximalitäts-Gebiet einer submaximalen Kurve ein Geradenbündel geben kann, welches noch eine andere submaximale Kurve besitzt. Wenn eine submaximale Kurve C gegeben ist und die numerischen Bedingungen aus Thm. 2.2.1 und Satz 2.2.6 für kein weiteres Geradenbündel erfüllbar sind, so muss C in ihrem Submaximalitäts-Gebiet die einzige submaximale Kurve sein. Eine solche Anwendung ist die folgende:

Korollar 2.2.8. *Sei A eine abelsche Fläche, L ein amples Geradenbündel und $C \in |4nL|$ eine submaximale Kurve. Dann ist C die einzige submaximale Kurve für jedes Geradenbündel in $\text{SG}(C)$ und die Funktion $L' \mapsto \varphi_C(L')$ stimmt auf $\text{SG}(C)$ mit der Seshadri-Funktion überein.*

Beweis. Wir werden zeigen, dass die Einschränkungen, welche durch Thm. 2.2.1 und Satz 2.2.6 gegeben sind, nicht von $C_1 := C$ und einer weiteren Kurven C_2 erfüllt werden können. Nach Satz 2.2.6 gilt für den Schnitt $C_1 \cdot C_2$, dass er von der Form $m_1 \cdot m_2$ ist, wobei die Zahlen m_1 und m_2 nicht durch 4 teilbar sind (siehe Thm. 2.2.1). Falls m_1 ungerade ist, so ist $m_1 \cdot m_2$ nicht durch 4 teilbar. Dies liefert einen Widerspruch, da $C_1 \cdot C_2 = 4n(L \cdot C_2)$ gilt. Falls m_1 und m_2 gerade sind, so ist $m_1 \cdot m_2$ nicht durch 8 teilbar. Andererseits gibt es aber in diesem Fall ein Geradenbündel L_2 mit $\mathcal{O}_A(C_2) = 2L_2$. Dies liefert uns einen Widerspruch, da $C_1 \cdot C_2 = 8n(L \cdot L_2)$ gilt. \square

Um das vorherige Korollar noch expliziter zu machen, wenden wir es auf die Seshadri-Kurven von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen an:

Beispiel 2.2.9. Sei A eine abelsche Fläche, L_0 eine irreduzible Prinzipalpolarisierung und C_0 die Seshadri-Kurve von L_0 , d. h. $C_0 \in |4L_0|$ und $\text{mult}_0 C_0 = 6$ (siehe [45, Prop. 2]). Dann ist C_0 für jedes Geradenbündel in $\text{SG}(C_0)$ die einzige submaximale Kurve.

Die Anwendung von Satz 2.2.6 beschränkt sich nicht nur auf einzelne irreduzible Kurven, sondern lässt sich auch auf alle Kurven der Fläche simultan anwenden:

Satz 2.2.10. *Sei A eine abelsche Fläche. Weiter sei B_1, \dots, B_ρ eine Basis von $\text{NS}(A)$ und $S \in \text{GL}_\rho(\mathbb{Z})$ die Schnittmatrix der Basis. Falls jeder Eintrag von S ein Vielfaches von 2 ist, dann besitzt jedes nef \mathbb{R} -Geradenbündel höchstens eine submaximale irreduzible Kurve.*

Beweis. Wir nehmen an, dass $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ gilt, da es sonst keine submaximale Kurven gibt. Da die Seshadri-Konstante von L also kleiner als die obere Schranke $\sqrt{L^2}$ ist, existiert mindestens eine submaximale Kurve C für L . Wir werden zeigen, dass die numerischen Einschränkungen, welche durch Thm. 2.2.1 und Satz 2.2.6 gegeben sind, nicht von zwei Kurven C_1 und C_2 gleichzeitig erfüllt werden können. Zu diesem Zweck betrachten wir die allgemeineren Bedingungen

- (i) $L_1^2 = m_1^2 - 1$ für ein $m_1 \in \mathbb{N}$,
- (ii) $L_2^2 = m_2^2 - 1$ für ein $m_2 \in \mathbb{N}$,
- (iii) $L_1 \cdot L_2 = m_1 m_2$,

und werden zeigen, dass diese für keine Wahl von Geradenbündeln L_1 und L_2 mit positiven Zahlen m_1 und m_2 erfüllbar sind.

An dieser Stelle sei erwähnt, dass damit auch die Kombinationen mit $C_i^2 = m_i^2 - 4$ abgedeckt werden, denn nach Thm. 2.2.1 ist $\mathcal{O}_X(C_i)$ in diesem Fall ein gerades Vielfaches eines anderen Geradenbündels L'_i , d. h. $\mathcal{O}_X(C_i) = 2L'_i$. Ersetzen wir nun $\mathcal{O}_X(C_i)$ durch L'_i und teilen die entsprechenden Bedingungen durch 2 bzw. 4, so erhalten wir wieder Bedingungen von der Form (i)–(iii).

Wir zeigen nun, dass die Bedingungen (i)–(iii) nicht erfüllbar sind. Wir nehmen an, dass es natürliche Zahlen m_1 und m_2 und Geradenbündel L_1 und L_2 gibt, welche die Bedingungen (i) und (ii) erfüllen. Nach Voraussetzung ist jeder Eintrag von S ein Vielfaches von 2 und somit ist der Schnitt von zwei beliebigen Geradenbündeln stets gerade. Also gilt $L_1 \cdot L_2 \in 2\mathbb{Z}$. Allerdings folgt aus den Bedingungen (i) und (ii), dass die Zahlen m_1 und m_2 ungerade sind und daher ist auch das Produkt $m_1 m_2$ ungerade. Dies zeigt, dass $m_1 m_2$ und $L_1 \cdot L_2$ aufgrund der unterschiedlichen Paritäten niemals übereinstimmen können. Also kann es kein Geradenbündel geben, welches zwei submaximale Kurven besitzt. \square

Für submaximale Kurven folgt daraus:

Korollar 2.2.11. *Sei A eine abelsche Fläche, so dass jedes nef \mathbb{R} -Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt (z.B. falls die Schnittmatrix von A in jedem Eintrag gerade ist). Falls C eine submaximale Kurve ist, dann stimmt die Funktion φ_C in $\text{SG}(C)$ mit der Seshadri-Funktion überein, d. h.*

$$\varepsilon|_{\text{SG}(C)} = \varphi_C|_{\text{SG}(C)}.$$

Der Fall, dass alle Einträge der Schnittmatrix S gerade sind, kommt unter anderem bei prinzipalpolarisierten einfachen abelschen Flächen mit reeller Multiplikation vor (siehe Abschnitt 3.1.1). Für abelsche Flächen mit einer solchen Schnittmatrix ist die Seshadri-Funktion für jedes ample Geradenbündel L mit $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ in einer Umgebung linear. Wir werden sehen, dass die Gestalt der Seshadri-Funktion im Fall $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ von verschiedener Komplexität sein kann: Auf einfachen abelschen Flächen mit $\rho(A) = 2$ lässt sich die Seshadri-Funktion in jeder Umgebung eines Geradenbündels L mit $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ nur als Infimum von *unendlich* vielen linearen Funktionen darstellen (siehe Kor. 3.1.11). Im Kontrast dazu ist es auf nicht-einfachen abelschen Flächen möglich, dass die Seshadri-Funktion in einer Umgebung eines solchen Geradenbündels stückweise linear ist (siehe Bsp. 3.3.7).

2.3. Pell-Schranken und submaximale Kurven

Wir werden ausgehend von Thm. 2.2.1 genauer untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen submaximalen amplen Kurven und Pell-Schranken (siehe Def. 2.1.8) besteht. In Thm. 2.2.1 haben wir bereits gesehen, dass es für jede submaximale Kurve eine Pell-Schranke gibt, die mit φ_C übereinstimmt. Wir gehen daher der Frage nach, wie wir submaximale Kurven in der Menge der Pell-Schranken identifizieren können. Die folgende Proposition zeigt unter anderem, dass jede submaximale Kurve mit *genau einer* Pell-Schranke übereinstimmt:

Proposition 2.3.1. *Sei A eine abelsche Fläche, L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

- (i) *Es gibt eine submaximale Kurve C , so dass C oder $2C$ der einzige Pell-Divisor von L ist.*
- (ii) *Es gibt eine submaximale Kurve $C \in |nL|$ für ein $n \in \mathbb{N}$.*
- (iii) *Die Pell-Schranke π_L stimmt mit der Seshadri-Funktion in einem offenen Unterkegel $U \subset \text{Nef}(A)$ um L überein.*
- (iv) *Die Pell-Schranke π_L stimmt mit einer linearen Funktion φ_C überein, wobei C eine submaximale Kurve ist.*

Insbesondere stimmt die lineare Funktion φ_C einer submaximalen Kurve mit einer Pell-Schranke π_L genau dann überein, wenn $L \equiv r\mathcal{O}_A(C)$ für ein $r \in \mathbb{Q}^+$ gilt.

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) ist eine unmittelbare Konsequenz von Thm. 2.2.1. Wir zeigen zuerst die Implikation (i) \Rightarrow (iii). Aus Thm. 2.2.1 folgt, dass die linearen Funktionen φ_C und π_L übereinstimmen, wobei φ_C nach Kor. 1.1.20 in einem offenen Unterkegel mit der Seshadri-Funktion übereinstimmt.

Für die Implikation (iii) \Rightarrow (iv) betrachten wir eine Seshadri-Kurve C von L . Da es sich bei φ_C ebenfalls um eine lineare Funktion mit $\varphi_C(L) = \pi_L(L)$ handelt, können sich π_L und φ_C nur unterscheiden, falls es eine Richtung gibt, in der die linearen Funktionen eine unterschiedliche Steigung besitzen. Das liefert jedoch ein Geradenbündel $M \in U$ mit $\varphi_C(M) < \pi_L(M)$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass π_L in U mit der Seshadri-Funktion übereinstimmt.

Schließlich betrachten wir die Implikation (iv) \Rightarrow (ii). Es gelte also $\varphi_C = \pi_L$ für eine submaximale Kurve C und daher ist C submaximal für L . Sei $P \in |2kL|$ mit $\text{mult}_0 P \geq 2\ell$ ein beliebiger Pell-Divisor von L . Wir werden zeigen, dass $P = nC$ gilt. Nach Definition der Pell-Divisoren und Pell-Schranken gilt für die lineare Funktion φ_P

$$\varphi_P(M) = \frac{M \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \frac{M \cdot (2kL)}{2\ell} = \pi_L(M) = \varphi_C(M) \quad \text{für alle } M \in \text{Nef}(A).$$

Diese Ungleichung impliziert, dass P die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(C)$ bestimmt, da C nach Prop. 1.1.19 die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(C)$ bestimmt und sogar die einzige submaximale Kurve ist. Wir behaupten, dass jede irreduzible Komponente D von P die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(C)$ berechnet und daher $D = C$ gilt. Wir nehmen dafür an, dass es eine Komponente D von P gibt mit $\varphi_C(\mathcal{O}_A(C)) < \varphi_D(\mathcal{O}_A(C))$. Indem wir den Pell-Divisor in $P = D + R$ zerlegen, erhalten wir

$$\frac{\mathcal{O}_A(C) \cdot C}{\text{mult}_0 C} = \varphi_C(\mathcal{O}_A(C)) = \varphi_P(\mathcal{O}_A(C)) = \frac{\mathcal{O}_A(C) \cdot (D + R)}{\text{mult}_0 D + \text{mult}_0 R}.$$

Zusammen mit $\varphi_C(\mathcal{O}_A(C)) < \varphi_D(\mathcal{O}_A(C))$ folgt jedoch

$$\frac{\mathcal{O}_A(C) \cdot R}{\text{mult}_0 R} < \frac{\mathcal{O}_A(C) \cdot C}{\text{mult}_0 C},$$

was unmöglich ist, da C die Seshadri-Konstante von $\mathcal{O}_A(C)$ berechnet. Damit haben wir gezeigt, dass der Pell-Divisor nur C als Komponente besitzen kann. Also ist jeder Pell-Divisor P ein Vielfaches von C und somit folgt $C \in |nL|$ für ein $n \in \mathbb{N}$. \square

Die Bedingung (iii) in Prop. 2.3.1 wird es uns ermöglichen numerisch zu entscheiden, ob eine Pell-Schranke zu einer submaximalen Kurve korrespondiert. Dafür benötigen wir zunächst jedoch, dass die linearen Funktionen von elliptischen Kurven niemals mit Pell-Schranken übereinstimmen können:

Lemma 2.3.2. *Sei A eine abelsche Fläche, L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$. Dann gibt es keine elliptische Kurve E , so dass die Pell-Schranke π_L mit φ_E übereinstimmt.*

Beweis. Sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$ und E eine elliptische Kurve. Dann gilt $\varphi_L(E) = (E \cdot kL)/\ell > 0$, da kL ample ist. Andererseits gilt $\varphi_E(E) = E^2 = 0$, da E elliptisch ist. \square

Da wir die Seshadri-Konstante von Geradenbündeln L mit $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ über das Infimum der elliptischen Kurven und Pell-Schranken berechnen können (siehe Bem. 2.2.3), können wir Prop. 2.3.1 (iii) wie folgt formulieren:

Korollar 2.3.3. *Sei A eine abelsche Fläche, L ein primitives amplex und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) *Die Pell-Schranke π_L stimmt mit der Seshadri-Funktion in einer Umgebung U von L überein.*
- (ii) *Für jede andere Pell-Schranke $\pi_{L'}$ mit $L' \neq L$ und für jede elliptische Kurve E gilt $\pi_L(L) < \pi_{L'}(L)$ bzw. $\pi_L(L) < \varphi_E(L)$.*

Mit anderen Worten: π_L stimmt genau dann mit einer linearen Funktion einer submaximalen Kurven überein, wenn π_L für das Geradenbündel L ein absolutes Minimum in der Menge der Pell-Schranken und elliptischen Kurven annimmt.

Beweis. Wir nehmen an, es gelte (i). Wir müssen also ausschließen, dass $\pi_{L'}(L) = \pi_L(L)$ für eine andere Pell-Schranke bzw. $\varphi_E(L) = \pi_L(L)$ für eine elliptische Kurve gilt. Angenommen, es gelte Gleichheit in einer der beiden Situationen. Nach Prop. 2.3.1 und Lemma 2.3.2 ist $\pi_{L'}$ bzw. φ_E verschieden von φ_L . Die linearen Funktionen $\pi_{L'}$ und φ_E können sich nur von π_L unterscheiden, falls es eine Richtung gibt, in der sich die Steigungen unterscheiden. Das liefert jedoch ein Geradenbündel $M \in U$ mit $\pi_{L'}(M) < \varphi_L(M)$ bzw. $\varphi_E(M) < \varphi_L(M)$, was ein Widerspruch zu der Annahme ist, dass π_L in U mit der Seshadri-Funktion übereinstimmt.

Es gelte nun (ii) und sei C eine Seshadri-Kurve von L . Da für jede elliptische Kurve $\pi_L(L) < \varphi_E(L)$ gilt, handelt es sich bei C um eine ample Kurve und wir bezeichnen mit π_M die eindeutige Pell-Schranke mit $\pi_M = \varphi_C$. Da C und somit π_M die Seshadri-Konstante von L berechnen, gilt $\pi_M(L) \leq \pi_{L'}(L)$ für jede Pell-Schranke $\pi_{L'}$. Nach Annahme gilt jedoch $\pi_L(L) < \pi_{L'}(L)$ für jede Pell-Schranke mit $L' \neq L$. Dies impliziert $L = M$ und somit stimmen φ_C und π_L überein. Also ist Prop. 2.3.1 (iv) erfüllt und es folgt die Behauptung. \square

Wir können eine weitere Einschränkung an die Pell-Schranken und elliptischen Kurven in (ii) hinzufügen, indem wir Prop. 1.1.12 anwenden.

Korollar 2.3.4. *Sei A eine abelsche Fläche, L ein primitives amples und symmetrisches Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$ und U_L die offene Menge, in der jede Seshadri-Kurve von L submaximal ist (siehe Prop. 1.1.12). Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) *Die Pell-Schranke π_L stimmt mit der Seshadri-Funktion in einer Umgebung U von L überein.*
- (ii) *Für jede Pell-Schranke $\pi_{L'}$ mit $L' \neq L$ und $U_L \subset \text{SG}(\pi_{L'})$ und für jede elliptische Kurve E mit $U_L \subset \text{SG}(E)$ gilt $\pi_L(L) < \pi_{L'}(L)$ bzw. $\pi_L(L) < \varphi_E(L)$.*

Wir werden in Kapitel 3 sehen, dass diese Einschränkung zur Folge hat, dass wir auf abelschen Flächen mit $\rho(A) = 2$ die Seshadri-Konstante von allen nef Geradenbündeln algorithmisch berechnen können. Auf diesen abelschen Flächen gibt es höchstens zwei elliptische Kurven, wodurch sich die wesentliche Diskussion auf die Pell-Schranken bezieht. Die zusätzliche Einschränkung in Kor. 2.3.4 wird dazu führen, dass nur endlich viele Pell-Schranken in (ii) zu berücksichtigen sind (siehe Kor. 3.1.19 und Satz 3.1.20).

2.4. Seshadri-Konstanten bei „kleinen“ Pell-Divisoren

In diesem Abschnitt gehen wir darauf ein, wie die Existenz eines (schwach-)submaximalen Divisors $D \in |nL|$ genutzt werden kann, um die möglichen Werte der Seshadri-Konstante von L einzuschränken. Der Divisor D wird in unserer Situation entweder ein Pell-Divisor oder der schwach-submaximale Divisor aus Lemma 2.1.9 sein. Wir verwenden, dass eine submaximale Seshadri-Kurve eine Komponente des Pell-Divisors ist und $C^2 = m^2 - 1$ mit $m \in \mathbb{N}$ ungerade oder $C^2 = m^2 - 4$ mit $m \equiv 2 \pmod{4}$ gilt. Wir untersuchen auf welche Weisen der Divisor D zerfallen kann. Da die Schnitte von allen Komponenten stets positiv sind, gibt es nur numerisch endlich viele Konfigurationen für eine Zerlegung $D = nC + R$, wobei C eine Seshadri-Kurve von L und keine Komponente von R ist.

Wir werden diese Methode exemplarisch an zwei Beispielen durchführen und bestimmen alle theoretisch möglichen Werte der Seshadri-Konstante von L . Wir beginnen damit, dass wir das bereits bekannte Ergebnis zeigen, dass die Seshadri-Konstante einer Prinzipalpolarisierung L entweder 1 oder $\frac{4}{3}$ beträgt.

Beispiel 2.4.1. Sei A eine abelsche Fläche und L ein amples Geradenbündel mit $L^2 = 2$. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass L ein symmetrisches Geradenbündel ist. Dann zeigt die Pellsche-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$, dass ein Pell-Divisor $P \in |4L|$ mit $\text{mult}_0 P \geq 6$ existiert. Es gilt also

$$P^2 = 32, \quad \text{mult}_0 P \geq 6 \quad \text{und} \quad \varepsilon(L) \leq \frac{L \cdot P}{\text{mult}_0 P} \leq \frac{4}{3} < \sqrt{2}.$$

Sei C eine Seshadri-Kurve von L , dann wissen wir bereits, dass C eine Komponente von P ist. Wir schreiben $P = nC + R$ für den Pell-Divisor, wobei C keine Komponente von R ist. Für C sind wegen $P^2 = n^2 C^2 + R^2 + 2nC \cdot R = 32$ die folgenden Selbstschnitte, Multiplizitäten $m := \text{mult}_0 C$ und Häufigkeiten n möglich:

1.) $C^2 = 32, m = 6, n = 1$

3.) $C^2 = 8, m = 3, n = 1$

2.) $C^2 = 24, m = 5, n = 1$

4.) $C^2 = 0, m = 1, n \geq 1$

Fall 1) $C^2 = 32, m = 6, n = 1$: Es folgt $R = 0$ und somit $P = C$. Das heißt, dass der Pell-Divisor mit der Seshadri-Kurve übereinstimmt und den folgenden Wert für die Seshadri-Konstante liefert

$$\varphi_C(L) = \frac{4}{3}.$$

Fall 2) $C^2 = 24, m = 5, n = 1$: Für die Zerlegung $P = C + R$ des Pell-Divisors gilt $\text{mult}_0 R \geq 1$. Das ist jedoch ein Widerspruch, denn die Schnittungleichung liefert:

$$32 = P^2 = C^2 + R^2 + 2C \cdot R \geq 24 + 2C \cdot R \geq 24 + 2 \text{mult}_0 C \cdot \text{mult}_0 R = 34.$$

Fall 3a) $C^2 = 8, m = 3, n = 1$: Für die Zerlegung $P = C + R$ des Pell-Divisors gilt $\text{mult}_0 R \geq 3$. Angenommen es gelte $R^2 \geq 8$, dann erhalten wir mit der Schnittungleichung den folgenden Widerspruch

$$32 = P^2 = C^2 + R^2 + 2C \cdot R \geq 34.$$

Angenommen es gelte $R^2 = 2, 4$ oder 6 , dann folgt entsprechend $C \cdot R = 11, 10$ oder 9 . Dann folgt jedoch, dass C nicht submaximal ist, denn es gilt

$$\varphi_C(L) = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} = \frac{\frac{1}{4}P \cdot C}{3} = \frac{(C + R) \cdot C}{12} \geq \frac{17}{12} > \sqrt{2} = \sqrt{L^2}.$$

Der einzig verbleibende Fall ist somit $R^2 = 0$. Also ist R eine Summe von elliptischen Kurven, d. h. es gilt $R \equiv mE$ für eine elliptische Kurve E . Wegen $\text{mult}_0 P \geq 6$ und $\text{mult}_0 C = 3$ folgt $m \geq 3$. Die Gleichung $32 = (C + mE)^2$ liefert uns $12 = m(C \cdot E)$. Dann folgt jedoch, dass C nicht submaximal ist, denn es gilt

$$\varphi_C(L) = \frac{(C + mE) \cdot C}{12} = \frac{20}{12} > \sqrt{2} = \sqrt{L^2}.$$

Fall 3b) $C^2 = 8, m = 3, n = 2$: Es folgt $R = 0$ und somit $P = 2C$. Dieser Fall verhält sich analog zu Fall 1).

Fall 4) $C^2 = 0$ und $m = 1$: Wegen $C^2 = 0$ ist C eine elliptische Kurve und somit ist der Seshadri-Quotient ganzzahlig. Die einzige Möglichkeit ist daher

$$\varphi_C(L) = 1.$$

Wir halten also fest: Ist L eine Prinzipalpolarisierung, dann gilt entweder

- die Seshadri-Konstante wird von einer elliptischen Kurve E berechnet und es gilt $\varepsilon(L) = 1$,
- oder die Seshadri-Konstante wird von einer amplen Kurve C berechnet mit $P = C$ oder $P = 2C$ und $\varepsilon(L) = \frac{4}{3}$.

Beispiel 2.4.2. Sei A eine abelsche Fläche und L ein amples Geradenbündel mit $L^2 = 16$. Ohne Einschränkung sei L symmetrisch, dann zeigt Lemma 2.1.9, dass es einen Divisor $D \in |2L|$ gibt mit $\text{mult}_0 D \geq 8$. Es gilt also

$$D^2 = 64, \quad \text{mult}_0 D \geq 8 \quad \text{und} \quad \varepsilon(L) \leq \frac{L \cdot D}{\text{mult}_0 D} \leq 4 = \sqrt{L^2}.$$

Wir nehmen außerdem an, dass die Seshadri-Konstante kleiner als $\sqrt{L^2} = 4$ ist und es somit eine submaximale Seshadri-Kurve C gibt. Auch in diesem Fall nutzen wir aus, dass C eine Komponente von D ist. Wir schreiben $D = nC + R$ für die Zerlegung des Divisors, wobei C keine Komponente von R ist. Für die Seshadri-Kurve C sind wegen $D^2 = n^2 C^2 + R^2 + 2nC \cdot R = 64$ die folgenden Selbstschnitte, Multiplizitäten $m := \text{mult}_0 C$ und Häufigkeiten n möglich:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1.) $C^2 = 48, m = 7, n = 1$ | 4.) $C^2 = 8, m = 3, n = 1, 2$ |
| 2.) $C^2 = 32, m = 6, n = 1$ | 5.) $C^2 = 0, m = 1, n \geq 1$ |
| 3.) $C^2 = 24, m = 5, n = 1$ | |

Wir werden die Gleichungen mit (*) markieren, welche zu einem möglichen Wert für die Seshadri-Konstante von L führen.

Fall 1) $C^2 = 48, m = 7, n = 1$: Für die Zerlegung $D = C + R$ gilt $\text{mult}_0 R \geq 1$. Angenommen es gelte $R^2 \geq 4$, dann erhalten wir mit der Schnittungleichung den folgenden Widerspruch

$$64 = D^2 = C^2 + R^2 + 2C \cdot R \geq 48 + 4 + 2 \text{mult}_0 C \cdot \text{mult}_0 R = 66.$$

Angenommen es gelte $R^2 = 2$, dann folgt $C \cdot R = 7$. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zum Hodge-Index-Satz, denn es gilt:

$$(C \cdot R)^2 = 49 < 48 \cdot 2 = C^2 \cdot R^2.$$

Angenommen es gelte $R^2 = 0$. Dann gibt es eine elliptische Kurve E mit $R \equiv mE$. Wegen $\text{mult}_0 D \geq 8$ und $\text{mult}_0 C = 7$ folgt $m \geq 1$. Die Gleichung $64 = (C + mE)^2$ liefert uns $8 = m(C \cdot E)$. Dann folgt jedoch, dass C nicht submaximal ist, denn es gilt

$$\varphi_C(L) = \frac{(C + mE) \cdot C}{14} = \frac{72}{14} > 4 = \sqrt{L^2}.$$

Fall 2) $C^2 = 32, m = 6, n = 1$: Für die Zerlegung $D = C + R$ gilt $\text{mult}_0 R \geq 2$. Angenommen es gelte $R^2 \geq 10$, dann erhalten wir mit der Schnittungleichung den folgenden Widerspruch

$$64 = D^2 = C^2 + R^2 + 2C \cdot R \geq 32 + 10 + 24 = 66.$$

Angenommen es gelte $R^2 = 6$ oder 8 , dann folgt $C \cdot R = 13$ oder 12 . Dies liefert jedoch einen Widerspruch zum Hodge-Index-Satz, denn es gilt:

$$(C \cdot R)^2 \leq 13^2 < 32 \cdot 6 \leq C^2 \cdot R^2.$$

Wenn $R^2 = 2$ bzw. 4 gilt, dann folgt $C \cdot R = 15$ bzw. 14. Für die Seshadri-Konstante erhalten wir die beiden folgenden möglichen Werte

$$\varphi_C(L) = \frac{(C+R) \cdot C}{12} = \frac{47}{12} < 4 = \sqrt{L^2} \quad \text{bzw.} \quad \varphi_C(L) = \frac{46}{12} < 4 = \sqrt{L^2}. \quad (*)$$

Angenommen es gelte $R^2 = 0$, d.h. $R \equiv mE$ für eine elliptische Kurve E . Wegen $\text{mult}_0 D \geq 8$ und $\text{mult}_0 C = 6$ folgt $m \geq 2$. Die Gleichung $64 = (C + mE)^2$ liefert uns $16 = m(C \cdot E)$. Dann folgt jedoch, dass C nicht submaximal ist, denn es gilt

$$\varphi_C(L) = \frac{(C + mE) \cdot C}{12} = 4 = \sqrt{L^2}.$$

Fall 3) $C^2 = 24$, $m = 5$, $n = 1$: Für die Zerlegung $D = C + R$ gilt $\text{mult}_0 R \geq 3$. Für $R^2 \geq 12$ erhalten wir mit der Schnittungleichung einen Widerspruch zu $64 = D^2$. Für $R^2 = 6, 8$ und 10 erhalten wir einen Widerspruch zum Hodge-Index-Satz. Für $R^2 = 0, 2$ und 4 folgt, dass der Seshadri-Quotient $\varphi_C(L)$ nicht submaximal ist.

Fall 4a) $C^2 = 8$, $m = 3$, $n = 1$: Für die Zerlegung $D = C + R$ gilt $\text{mult}_0 R \geq 5$. Für $R^2 \geq 28$ erhalten wir mit der Schnittungleichung einen Widerspruch zu $64 = D^2$. Für $R^2 \leq 24$ folgt, dass der Seshadri-Quotient $\varphi_C(L)$ nicht submaximal ist. Für $R^2 = 26$ folgt $C \cdot R = 15$. Für die Seshadri-Konstante erhalten wir den folgenden möglichen Wert

$$\varphi_C(L) = \frac{(C+R) \cdot C}{6} = \frac{23}{6} < 4 = \sqrt{L^2}. \quad (*)$$

Fall 4b) $C^2 = 8$, $m = 3$, $n = 2$: Für die Zerlegung $D = 2C + R$ gilt $\text{mult}_0 R \geq 2$. Für $R^2 \geq 10$ erhalten wir mit der Schnittungleichung einen Widerspruch zu $64 = D^2$. Für $R^2 = 2$ und 6 folgt, dass der Schnitt $C \cdot R$ nicht ganzzahlig ist. Für $R^2 = 8$ folgt $C \cdot R = 6$, womit wir einen Widerspruch zum Hodge-Index-Satz erhalten. Für $R^2 = 4$ folgt $C \cdot R = 7$, was uns den folgenden möglichen Wert für die Seshadri-Konstante liefert

$$\varphi_C(L) = \frac{(C+R) \cdot C}{6} = \frac{23}{6} < 4 = \sqrt{L^2}. \quad (*)$$

Fall 5) $C^2 = 0$ und $m = 1$: Wegen $C^2 = 0$ ist C eine elliptische Kurve und somit ist der Seshadri-Quotient ganzzahlig. Wir erhalten daher die Möglichkeiten

$$\varphi_C(L) \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Zusammenfassend können wir also schließen, dass für ein amples Geradenbündel L mit $L^2 = 36$ gilt:

- Die Seshadri-Konstante wird von einer elliptischen Kurve E berechnet mit

$$\varepsilon(L) \in \{1, 2, 3, 4\},$$

- oder die Seshadri-Konstante wird von einer amplen Kurve C berechnet mit

$$\varepsilon(L) \in \left\{ \frac{46}{12}, \frac{47}{12}, 4 \right\}.$$

Kapitel 3

Seshadri-Funktion auf abelschen Flächen mit Néron-Severi-Gruppe von Rang 2

In diesem Kapitel diskutieren wir die Seshadri-Funktion auf abelschen Flächen mit Picard Zahl 2. Bauer gelang es die Seshadri-Konstanten mit Hilfe der Pell-Divisoren auf abelschen Flächen mit Picard Zahl 1 vollständig zu bestimmen [3, Thm. 6.1]. Abelsche Flächen mit Picard Zahl 2 sind somit der nächste natürliche offene Fall, den es zu untersuchen gilt. Ein weiterer Vorteil dieser Flächen ist, dass sich die Diskussion im Wesentlichen auf die submaximalen amplen Kurven beschränkt, da es höchstens zwei elliptische Kurven gibt. Der einzige Fall, in dem die Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen vom Rang 2 bisher vollständig verstanden sind, ist das Produkt $E_1 \times E_2$ von zwei nicht isogenen elliptischen Kurven, da in diesem Fall jede Seshadri-Konstante von E_1 oder E_2 berechnet wird.

Es wird uns möglich sein, die Frage nach den Seshadri-Konstanten vollständig zu klären. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 werden wir einen Algorithmus angeben, mit dem wir die Seshadri-Konstante für jedes beliebige nef Geradenbündel effektiv berechnen können. Das wesentliche Argument für die Berechnung wird sein, dass wir für das Kriterium Kor. 2.3.4 (ii) nur endlich viele Pell-Schranken berücksichtigen müssen und wir diese Pell-Schranken sogar explizit angeben können. Dies wird es uns außerdem ermöglichen den Funktionsgraphen der Seshadri-Funktion (näherungsweise) zu konstruieren und Aussagen über die Struktur der Seshadri-Funktion treffen zu können. Die Komplexität der Seshadri-Funktion kann sehr variieren: Auf einfachen abelschen Flächen vom Rang 2 gibt es Fälle, in denen jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt. In diesem Fall besitzt die Seshadri-Funktion eine ähnlich komplexe Struktur wie die Cantor-Funktion (siehe Def. 3.1.5 und Bsp. 3.1.7). Im Kontrast dazu gibt es nicht-einfache abelsche Flächen vom Rang 2, so dass die Seshadri-Funktion stückweise linear ist (siehe Bsp. 3.3.7).

Wir beginnen unsere Betrachtungen zunächst mit dem Fall, dass die abelsche Fläche einfach und prinzipalpolarisiert ist, da wir auf diesen Flächen die Néron-Severi-Gruppe explizit bestimmen können. Diese Resultate wurden bereits in [6] veröffentlicht. Anschließend werden wir die verbleibenden abelschen Flächen betrachten. In diesen Fällen lässt sich die Néron-Severi-Gruppe nicht explizit über die symmetrische Endomorphismenalgebra bestimmen, da der Isomorphismus $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(V)$ keinen Isomorphismus auf den zugrunde liegenden Gruppen induziert. Wir haben allerdings in Thm. 2.2.4 gesehen, dass die Seshadri-Funktion durch die Schnittmatrix und den Nef-Kegel eindeutig bestimmt ist. Wir werden daher die Seshadri-Konstanten anhand der theoretisch möglichen Schnittmatrizen diskutieren.

3.1. Prinzipalpolarisierte einfache abelsche Flächen mit $\rho=2$

3.1.1. Néron-Severi-Gruppe und Nef-Kegel

Wir führen zunächst die nötigen Grundlagen für die Betrachtung der Seshadri-Funktion auf einer einfachen abelschen Fläche X mit $\rho = 2$ ein. Im Folgendem bezeichne X stets eine *prinzipalpolarisierte einfache* abelsche Fläche mit $\rho = 2$. Da Seshadri-Konstanten unabhängig von der numerischen Klasse der Geradenbündel sind, werden wir zuerst eine Basis der Néron-Severi-Gruppe mit dem Isomorphismus $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(X)$ konstruieren.

Auf einer einfachen abelschen Fläche vom Rang 2 ist die Endomorphismenalgebra entweder $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für quadratfreie Zahlen $d > 0$ oder $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(A) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d}, \sqrt{e})$ für quadratfreie Zahlen $d > 0 > e$. Wir erhalten über die Rosati-Involution die symmetrische Endomorphismenalgebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(X) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ für eine quadratfreie ganze Zahl $d \geq 2$ ganz unabhängig davon, ob X reelle oder komplexe Multiplikation besitzt. Der symmetrische Endomorphismenring $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X)$ ist eine Ordnung der Algebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(X) \cong \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, d. h. ein Gitter im \mathbb{Q} -Vektorraum $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit einer Ringstruktur. Somit ist $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X)$ von der Form

$$\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) \cong \mathbb{Z} + f\omega\mathbb{Z} = \mathbb{Z}[f\omega],$$

für ein $f \in \mathbb{N}$ und

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{d} & \text{falls } d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{d}) & \text{falls } d \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Alternative Darstellung der Fälle: Die folgende äquivalente Darstellung der Endomorphismenringe wird die Anzahl der zu betrachtenden Fälle reduzieren:

- *Fall 1:* $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$, für eine nicht quadratische natürliche Zahl e .
- *Fall 2:* $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$, für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$.

Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ an und erhalten

$$\mathbb{Z}[f\omega] = \mathbb{Z}[f\sqrt{d}] = \mathbb{Z}[\sqrt{f^2d}].$$

Wenn wir nun $e := f^2d$ setzen, so erhalten wir entweder $e \equiv 2, 3 \pmod{4}$, falls f ungerade ist, oder $e \equiv 0 \pmod{4}$, falls f gerade ist.

Als nächstes betrachten wir den Fall $d \equiv 1 \pmod{4}$. Falls f gerade ist, so gilt

$$\mathbb{Z}[f\omega] = \mathbb{Z}\left[\frac{f}{2}(1 + \sqrt{d})\right] = \mathbb{Z}\left[\sqrt{\frac{f^2d}{4}}\right].$$

In diesem Fall setzen wir $e := \frac{f^2d}{4}$ und erhalten $e \equiv 0 \pmod{4}$ oder $e \equiv 1 \pmod{4}$ abhängig davon, ob f durch 4 teilbar ist. Somit kommt jeder Fall $\mathrm{End}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ für nicht quadratische natürliche Zahlen e vor. Wenn f ungerade ist, so gilt

$$\mathbb{Z}[f\omega] = \mathbb{Z}\left[\frac{f}{2}(1 + \sqrt{d})\right] = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}(1 + \sqrt{f^2d})\right]$$

und für $e := f^2d$ gilt $e \equiv 1 \pmod{4}$.

Da X eine Prinzipalpolarisierung L_0 trägt, liefert der Isomorphismus von \mathbb{Q} -Vektorräumen (siehe Prop. 1.2.1)

$$\varphi_{L_0} : \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{sym}}(X), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

einen Isomorphismus zwischen den zugrunde liegenden Gruppen. Wir erhalten eine Basis der Néron-Severi-Gruppe durch die Urbilder $L_0 = \varphi_{L_0}^{-1}(1)$ und $L_{\infty} := \varphi_{L_0}^{-1}(\sqrt{e})$ (bzw. $\varphi_{L_0}^{-1}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e})$). Zur Bestimmung der Schnittmatrix von (L_0, L_{∞}) benötigen wir die charakteristischen Polynome der analytischen Darstellung der Endomorphismen \sqrt{e} und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}$. Die charakteristischen Polynome stimmen dabei mit den Minimalpolynomen über \mathbb{Q} von \sqrt{e} und $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}$ überein, d. h.

$$P_{\sqrt{e}}^a(t) = t^2 - e$$

bzw.

$$P_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}}^a(t) = t^2 - t + \frac{1-e}{4}.$$

Die Koeffizienten der Minimalpolynome liefern uns nach Prop. 1.2.2 die gesuchten Schnittzahlen, so dass wir die folgenden Schnittmatrizen erhalten:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix} \text{ im Fall } \mathbb{Z}[\sqrt{e}] \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1-e}{2} \end{pmatrix} \text{ im Fall } \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]. \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.1.1. Die Endomorphismenringe von einfachen abelschen Varietäten sind gut verstanden (siehe [11, Sec. 5.5]). Der Endomorphismenring ist eine Ordnung \mathfrak{o} der Algebra $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(X)$. Sei D eine \mathbb{Q} -Algebra wie in Satz 1.2.4, dann zeigt [11, Sec. 9], dass es zu jeder Ordnung \mathfrak{o} von D eine abelsche Fläche X mit $\mathrm{End}(X) = \mathfrak{o}$ gibt. Es ist allerdings im Allgemeinen nicht bekannt, ob es immer eine *prinzipalpolarisierte* abelsche Fläche mit einem solchem Endomorphismenring gibt. Für einfache abelsche Varietäten mit reeller Multiplikation ist jedoch bekannt, dass es tatsächlich immer eine prinzipalpolarisierte abelsche Fläche zu einer gewünschten Ordnung von D gibt (siehe [10, Prop. 2.1]). Das bedeutet, dass es für jede Ordnung $\mathfrak{o} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ eine einfache prinzipalpolarisierte abelsche Fläche mit reeller Multiplikation gibt, so dass $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathfrak{o}$ gilt. Unklar ist jedoch, ob es eine prinzipalpolarisierte abelsche Fläche mit *komplexer* Multiplikation gibt, so dass $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathfrak{o}$ gilt.

Da wir nun eine Basis für die Néron-Severi-Gruppe bestimmt haben, können wir mit Hilfe des verbesserten Nakai-Moishezon-Kriterium für Ampleness auf abelschen Varietäten [11, Cor. 4.3.3] den Ample-Kegel und Nef-Kegel explizit bestimmen.

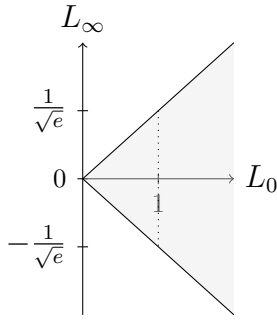
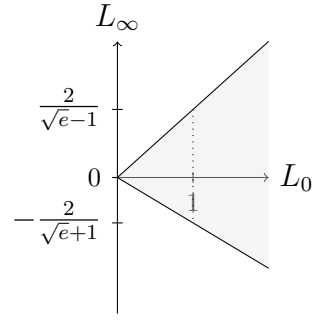
Lemma 3.1.2. *Sei L ein Geradenbündel auf X , dessen numerische Klasse gegeben ist durch $L \equiv aL_0 + bL_{\infty}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Im Fall $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ ist L genau dann ample, wenn gilt*

$$a > 0 \quad \text{und} \quad L^2 = 2a^2 - 2eb^2 > 0.$$

Im Fall $\mathrm{End}^{\mathrm{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ ist L genau dann ample, wenn gilt

$$a > 0 \quad \text{und} \quad L^2 = 2a^2 + 2ab + \frac{1-e}{2}b^2 > 0.$$

Dies liefert uns den folgenden Nef-Kegel im Néron-Severi-Vektorraum:


 Abb. 3.1: Der Nef-Kegel im Fall $\mathbb{Z}[\sqrt{e}]$.

 Abb. 3.2: Der Nef-Kegel im Fall $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$.

Wegen der Homogenität der Seshadri-Funktion genügt es die Seshadri-Funktion auf einem kompakten Querschnitt des Nef-Kegels zu untersuchen. Jedes nicht triviale Geradenbündel $L \in \text{Nef}(X)$ lässt sich als positives Vielfaches eines Bündels der Form $L_t := L_0 + tL_\infty$ darstellen. Aus Lemma 3.1.2 folgt: Im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ ist L_t genau dann nef, wenn $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$ gilt, und im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ ist L_t genau dann nef, wenn $-\frac{2}{\sqrt{e}+1} \leq t \leq \frac{2}{\sqrt{e}-1}$ gilt. Wir bezeichnen das entsprechende Intervall, in dem L_t nef ist, mit $\mathcal{N}(X) = [-\frac{1}{\sqrt{e}}, \frac{1}{\sqrt{e}}]$ bzw. $\mathcal{N}(X) = [-\frac{2}{\sqrt{e}+1}, \frac{2}{\sqrt{e}-1}]$. Eine Klasse L_t ist genau dann ample, wenn t im Inneren des Intervalls $\mathcal{N}(X)$ liegt.

Wir verstehen im Folgenden $\mathcal{N}(X)$ sowohl als das reelle Intervall, als auch als Menge der nef Geradenbündel L_t mit $t \in \mathcal{N}(X)$. Für ein \mathbb{Q} -Geradenbündel $L_{p/q}$ gehen wir immer von einer vollständig gekürzten Darstellung aus, d. h. $\text{ggT}(p, q) = 1$. Wir fassen die Seshadri-Funktion auf X folgendermaßen auf

$$\varepsilon : \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \varepsilon(L_t).$$

Entsprechend liefern uns Kurven und effektive Divisoren D lineare Funktionen auf dem Intervall $\mathcal{N}(X)$, d. h.

$$\varphi_D : \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{L_t \cdot D}{\text{mult}_0 D}.$$

Ausgangslage: Nach Thm. 1.2.7 gilt für ein amples Geradenbündel L auf einer einfachen abelschen Fläche

$$\sqrt{\frac{7}{8}}L^2 \leq \varepsilon(L) \leq \sqrt{L^2}.$$

Das heißt, dass wir jeweils eine untere und obere Schranke für die Seshadri-Funktion haben. Die nachfolgende Graphik beschreibt die Situation, in der wir uns befinden: Die gestrichelten Funktionsgraphen in der Graphik geben jeweils die obere und untere Schranke an. Darüber hinaus wissen wir nach Bsp. 2.2.9, wie die Seshadri-Funktion in einer Umgebung einer Prinzipalpolarisierung aussieht. Sei also $C_0 \in |4L_0|$ die Seshadri-Kurve von L_0 , dann berechnet C_0 in dessen Submaximalitäts-Gebiet die Seshadri-Konstanten und φ_{C_0} stimmt dort mit der Seshadri-Funktion überein. Das Submaximalitäts-Gebiet von C_0 wird durch die gepunktete Linie beschrieben.

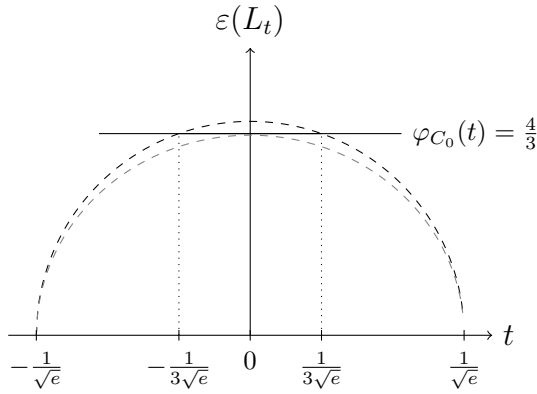


Abb. 3.3: Obere und untere Schranke der Seshadri-Funktion sowie die Seshadri-Funktion von L_0 im Fall $\mathbb{Z}[\sqrt{e}]$

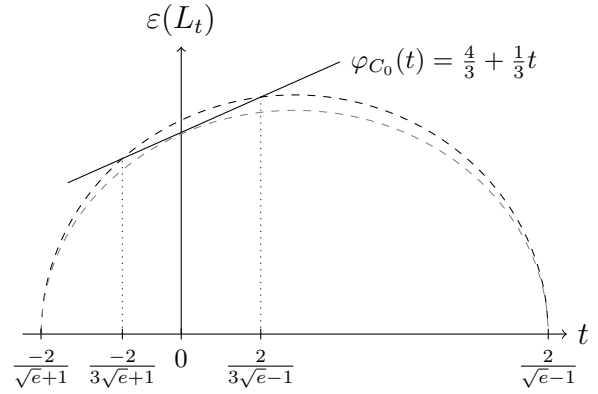


Abb. 3.4: Obere und untere Schranke der Seshadri-Funktion sowie die Seshadri-Funktion von L_0 im Fall $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$.

Es stellt sich also die Frage, wie die Seshadri-Funktion außerhalb des Submaximalitäts-Gebietes von C_0 aussieht. Wir wissen bereits, dass die Seshadri-Funktion im Fall $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ in einer Umgebung von L das Minimum von höchstens zwei linearen Funktionen ist. Unklar ist jedoch, wie genau sich diese Umgebungen global zusammensetzen.

3.1.2. Anzahl der submaximalen Kurven für ample Geradenbündel

Szemberg zeigte, dass ein amples Geradenbündel auf einer glatten projektiven Fläche S höchstens $\rho(S)$ viele submaximale Kurven besitzen kann (siehe Prop. 1.1.14). In unserem Fall besitzt jedes ample Geradenbündel somit höchstens $\rho(X) = 2$ viele submaximale Kurven. Wir zeigten bereits in Satz 2.2.10, dass jedes Geradenbündel nur eine submaximale Kurve besitzt, falls die Schnittmatrix S nur gerade Einträge besitzt. Also besitzt jedes Geradenbündel auf einer abelschen Fläche X mit $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ höchstens eine submaximale Kurve. Es zeigt sich, dass es auch abelsche Flächen mit $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ gibt, so dass jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt:

Satz 3.1.3. *Sei X eine prinzipalpolarisierte einfache abelsche Fläche mit $\rho(X) = 2$, so dass der symmetrische Endomorphismenring eine der folgenden Formen besitzt:*

- $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e , oder
- $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$, wobei e zusätzlich einen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$ besitzt.

Dann besitzt jedes nef \mathbb{R} -Geradenbündel L höchstens eine submaximale irreduzible Kurve. Insbesondere stimmt die lineare Funktion φ_C einer submaximalen Kurve C auf dem Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(C)$ mit der Seshadri-Funktion überein.

Beweis. Der Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ ist durch Satz 2.2.10 abgedeckt. Wir betrachten also den Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$, wobei e zusätzlich einen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$ besitzt.

Wir nehmen weiter an, dass $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$ gilt, da L sonst keine submaximalen Kurven besitzt.

Die zugrunde liegende Idee übernehmen wir aus dem Beweis von Satz 2.2.10. Wir werden zeigen, dass die allgemeineren Bedingungen gegeben durch Thm. 2.2.1 und Satz 2.2.6

- (i) $L_1^2 = m_1^2 - 1$ for $m_1 > 1$,
- (ii) $L_2^2 = m_2^2 - 1$ for $m_2 > 1$,
- (iii) $L_1 \cdot L_2 = m_1 m_2$,

für keine Wahl von Geradenbündeln L_1 und L_2 sowie positive Zahlen m_1 und m_2 erfüllbar sind. Somit ist es insbesondere nicht möglich, dass zwei irreduzible Kurven diese Bedingungen erfüllen. Die entscheidende Idee für diesen Fall ist, dass wir die Gleichungen (i)–(iii) modulo p betrachten. Wir nehmen daher an, dass die Bedingungen (i)–(iii) für Geradenbündel $L_i \equiv a_i L_0 + b_i L_\infty$ und natürliche Zahlen m_i für $i = 1, 2$ erfüllt seien und führen dies zu einem Widerspruch. Da in der Schnittmatrix (3.1) der Eintrag $\frac{1-e}{2}$ vorkommt, erweitern wir die Gleichungen mit 2 und erhalten:

- (i) $2L_1^2 = 4a_1^2 + 4a_1b_1 + (1-e)b_1^2 = 2m_1^2 - 2$,
- (ii) $2L_2^2 = 4a_2^2 + 4a_2b_2 + (1-e)b_2^2 = 2m_2^2 - 2$,
- (iii) $2L_1 \cdot L_2 = 4a_1a_2 + 2a_1b_2 + 2a_2b_1 + (1-e)b_1b_2 = 2m_1m_2$.

Indem wir $c_i := 2a_i + b_i$ für $i = 1, 2$ setzen und modulo p rechnen, können wir die Gleichungen nach Umstellen als Bilinearformen über dem endlichen Körper \mathbb{F}_p auffassen. Für die Gleichung (i) und (ii) erhalten wir somit

$$(I) \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ m_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ m_1 \end{pmatrix} = c_1^2 - 2m_1^2 = -2,$$

$$(II) \quad \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = c_2^2 - 2m_2^2 = -2$$

und stellen fest, dass $(c_i, m_i) \neq (0, 0) \in \mathbb{F}_p^2$ gilt. Die Gleichung (iii) können wir folgendermaßen umschreiben

$$(III) \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ m_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ -2m_1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = 0$$

und erhalten daher

$$\begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix} \in \ker \begin{pmatrix} c_1 \\ -2m_1 \end{pmatrix}^T = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -2m_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{F}_p \right\}.$$

Damit ergibt sich $c_2 = -2m_1\lambda$ und $m_2 = c_1\lambda$ für ein passendes $\lambda \in \mathbb{F}_p$. Wenn wir diese Abhängigkeit nun in Gleichung (II) einsetzen und diese mit Hilfe von Gleichung (I) vereinfachen, erhalten wir

$$-2 = \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_2 \\ m_2 \end{pmatrix} = \lambda^2(4m_1^2 - 2c_1) = 4\lambda^2.$$

Das bedeutet nun aber, dass -2 ein quadratischer Rest modulo p sein muss. Dies ist jedoch unmöglich, wenn $p \equiv 5$ oder 7 modulo 8 ist. \square

Computergestützte Berechnungen in Maple (siehe Prop. 3.1.31) deuten darauf hin, dass Satz 3.1.3 sogar eine „genau dann wenn“ Aussage ist. Vermutlich gibt es in den verbleibenden Fällen immer ein nef Geradenbündel, welches zwei submaximale Kurven besitzt. In Abschnitt 3.1.7 werden wir zeigen, wie man die Existenz eines solchen Geradenbündels berechnen kann. Darüber hinaus werden wir eine Folge e_n angeben mit der Eigenschaft, dass es auf jeder prinzipalpolarisierten abelschen Fläche mit $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e_n}]$ ein amples Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven gibt.

Nach Prop. 1.1.14 ist die Anzahl der submaximalen Kurven für ein fixiertes Geradenbündel L_t beschränkt. Wir werden nun zeigen, dass unter der Voraussetzung $\varepsilon(L_t) < \sqrt{L_t^2}$ die Anzahl sogar in einer offenen Umgebung um L_t beschränkt ist. Das ist eine unmittelbare Folgerung des folgenden Lemmas.

Lemma 3.1.4. *Sei D ein submaximaler effektiver Divisor auf X . Dann existieren höchstens vier irreduzible Kurven, welche submaximal für ein Geradenbündel in $\text{SG}(D)$ sind.*

Falls D irreduzibel ist, dann gibt es höchstens drei irreduzible Kurven, welche submaximal für ein Geradenbündel in $\text{SG}(D)$ sind.

Beweis. Wir nehmen an, dass es 5 paarweise verschiedene irreduzible Kurven C_1, \dots, C_5 gibt, welche submaximal für gewisse Geradenbündel in $\text{SG}(D) = (a, b)$ sind. Seien $\text{SG}(C_i) = (a_i, b_i)$ die Submaximalitäts-Gebiete der Kurven C_i für $i = 1, \dots, 5$. Weiter seien $L_{t_i} \in \mathcal{N}(X)$ die eindeutigen Repräsentanten von $\mathcal{O}_X(C_i)$. Wir werden zeigen, dass das Submaximalitäts-Gebiet von C_3 vollständig in $\text{SG}(D)$ enthalten ist und somit C_3 nach Lemma 1.1.21 reduzibel ist, was ein Widerspruch zur Irreduzibilität von C_3 ist.

Da die Kurven C_i jeweils submaximal für ein amples Geradenbündel sind, bestimmen die Kurven C_i nach Prop. 1.1.19 ihre eigene Seshadri-Konstante und darüber hinaus ist C_i die einzige submaximale Kurve für $\mathcal{O}_X(C_i)$. Das heißt, dass C_i die einzige submaximale Kurve für L_{t_i} ist und folglich gilt $t_i \in \text{SG}(C_i)$ und $t_i \notin \text{SG}(C_j)$ für $i \neq j$.

Nach Umnummerierung können wir annehmen, dass $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5$ gilt. Wegen $t_i \in (a_i, b_i)$ und $t_j \notin (a_i, b_i)$ folgt für $i = 2, 3, 4$

$$(a_i, b_i) \subset (t_{i-1}, t_{i+1}) \quad \text{und} \quad t_i \in (b_{i-1}, a_{i+1}). \quad (*)$$

Die Submaximalitäts-Gebiete (a_1, b_1) und (a_5, b_5) müssen das Intervall (a, b) schneiden, weil C_1 und C_5 nach Voraussetzung für gewisse Geradenbündel in $\text{SG}(D) = (a, b)$ submaximal sind. Daher gilt $a < b_1$ und $a_5 < b$. Die Bedingungen in $(*)$ implizieren nun $t_2, t_3, t_4 \in (b_1, a_5) \subset (a, b)$. Wegen $(a_3, b_3) \subset (t_2, t_4) \subset \text{SG}(D)$ hat das zur Folge, dass $\text{SG}(C_3)$ vollständig in $\text{SG}(D)$ enthalten ist. Allerdings folgt mit Lemma 1.1.21, dass C_3 reduzibel ist, ein Widerspruch.

Für den zweiten Teil der Aussage, nehmen wir an, dass es außer D drei weitere irreduzible Kurven C_1, C_2 und C_3 gibt. Mit demselben Argument wie oben folgt, dass $t_2 \in (b_1, a_3)$, $a < b_1$, und $a_3 < b$ gilt. Also können wir Lemma 1.1.21 auf C_2 anwenden und erhalten erneut einen Widerspruch. \square

3.1.3. Struktur der Seshadri-Funktion: „zerbrochen linear“

Im Satz 1.1.16 haben wir gezeigt, dass die Seshadri-Funktion für jedes ample Geradenbündel L_λ mit $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ in einer Umgebung stückweise linear ist. Dieses Ergebnis deutet darauf hin, dass die Seshadri-Funktion auch global stückweise linear ist. Überraschenderweise werden wir allerdings sehen, dass die Seshadri-Funktion in den Punkten $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ in wesentlich komplizierterer Weise aus linearen Stücken zusammengesetzt ist und insbesondere nicht stückweise linear ist. Wir werden sehen, dass in jeder Umgebung von amplen Geradenbündeln L_λ mit $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ sich die Seshadri-Funktion nur als Infimum von unendlich vielen linearen Funktionen darstellen lässt. Im Fall, dass jedes Geradenbündel auf X höchstens eine submaximale Kurve besitzt, können wir zeigen, dass die Seshadri-Funktion folgende Struktur besitzt:

Definition 3.1.5. Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine stetige Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt „zerbrochen linear“, falls eine unendliche und nirgends dichte Teilmenge $M \subset I$ mit folgenden Eigenschaften existiert:

- (i) Für jeden Punkt $p \in I \setminus M$ existiert ein offenes Intervall $I_p \subset I \setminus M$, so dass $f|_{I_p}$ eine lineare Funktion ist.
- (ii) Falls $I_1 = (t_1, t_2)$ und $I_2 = (s_1, s_2)$ maximale offene Intervalle in I sind, auf denen f linear ist, dann sind I_1 und I_2 in $I \setminus M$ enthalten, und I_1 und I_2 grenzen nicht aneinander, d. h. $t_1 \neq s_2$ und $t_2 \neq s_1$.

Bemerkung 3.1.6.

- a) Die Definition schließt durch Bedingung (ii) (stückweise) lineare Funktionen aus, denn in einer (stückweisen) linearen Funktion grenzen die maximalen Intervalle, in denen f linear ist, aneinander oder die Menge M wäre leer.
- b) Die Bedingungen (i) und (ii) an die Menge M haben zur Folge, dass M perfekt ist, d. h. jeder Punkt $m \in M$ ist ein Häufungspunkt in $M \setminus \{m\}$. Für den Funktionsgraphen von f bedeutet dies: Immer wenn ein maximales lineares Segment von f endet, dann gibt es kein lineares Segment was unmittelbar an diesem Punkt beginnt. Stattdessen gibt es eine Folge von linearen Segmenten, welche gegen diesen Punkt konvergiert. Selbiges gilt für jedes lineare Segment, welches in der Folge enthalten ist.
- c) Wegen der Stetigkeit von f lässt sich für jeden Punkt $m \in M$ der Funktionswert $f(m)$ als Infimum von unendlich vielen linearen Funktionen darstellen.
- d) Im Hinblick auf die Seshadri-Funktion wird die Menge M die Geradenbündel L enthalten, für die $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ gilt. Eigenschaft b) liefert uns außerdem Folgendes: Da die Anzahl der linearen Funktionen, welche von Kurven stammen, abzählbar ist und es damit auch nur abzählbar viele Intervallgrenzen gibt, folgt, dass es überabzählbar viele $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ -Geradenbündel L mit $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ gibt, die kein Intervallende von linearen Funktionen sind. In diesen Punkten nähern sich von beiden Seiten unendlich viele lineare Segmente an.

Beispiel 3.1.7. Die Cantor-Funktion (siehe z.B. [17]) ist eine zerbrochen lineare Funktion. In diesem Fall entspricht die Menge M der Cantor-Menge.

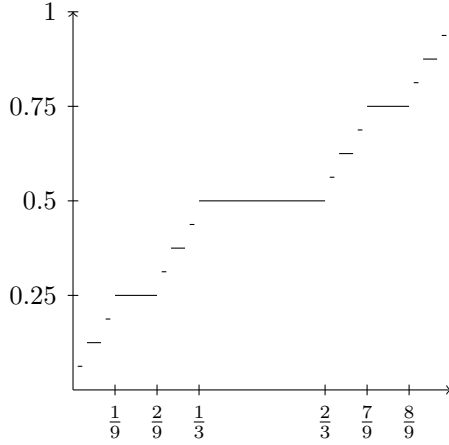


Abb. 3.5: Die ersten vier Iterationen der Cantor-Funktion.

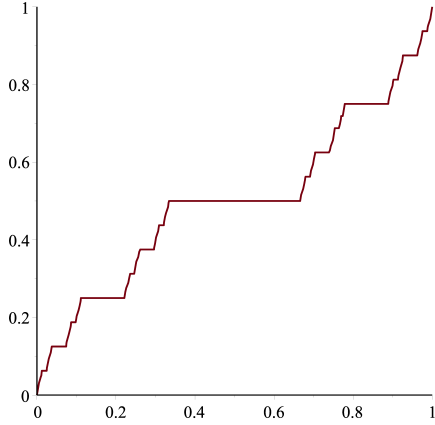


Abb. 3.6: Annäherung des Graphs der Cantor-Funktion in Maple.

Um zu zeigen, dass die Seshadri-Funktion zerbrochen linear ist, werden wir die Submaximalitäts-Gebiete von submaximalen Kurven und Pell-Schranken untersuchen. Wir wiederholen die Notation der Pell-Schranken auf dem Querschnitt des Nef-Kegels:

Notation 3.1.8. Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Weiter sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$. Dann ist die Pell-Schranke von $L_{p/q}$ die lineare Abbildung

$$\pi_{p/q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{L_t \cdot kqL_{p/q}}{\ell}.$$

Wir bestimmen die explizite Form der Submaximalitäts-Gebiete:

Lemma 3.1.9. Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$, und sei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$. Falls $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ gilt, dann ist das Submaximalitäts-Gebiet von $\pi_{p/q}$ gegeben durch

$$\text{SG}(\pi_{p/q}) = \left(\frac{2ek^2pq - \ell\sqrt{e}}{e(2k^2q^2 + 1)}, \frac{2ek^2pq + \ell\sqrt{e}}{e(2k^2q^2 + 1)} \right).$$

Falls $\text{End}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ gilt, dann ist $\text{SG}(\pi_{p/q})$ gegeben durch

$$\text{SG}(\pi_{p/q}) = \left(\frac{2 + 2ek^2pq - 2\ell\sqrt{e}}{(e-1) + 2eq^2k^2}, \frac{2 + 2ek^2pq + 2\ell\sqrt{e}}{(e-1) + 2eq^2k^2} \right).$$

Beweis. Die Intervallgrenzen von $\text{SG}(\pi_{p/q}) = (t_1, t_2)$ sind die Lösungen t der Gleichung

$$\sqrt{L_t^2} = \pi_{p/q}(t).$$

Im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ sind die Lösungen

$$t_{1,2} = \frac{2ek^2pq \mp \ell\sqrt{e}\sqrt{\ell^2 - (qL_{p/q})^2k^2}}{e(2ek^2p^2 + \ell^2)}.$$

Den Zähler können wir direkt mit der Pellschen-Gleichung $\ell^2 - (qL_{p/q})^2k^2 = 1$ vereinfachen, während wir im Nenner die Identität $\ell^2 + 2ek^2p^2 = 1 + 2k^2q^2$ verwenden, welche äquivalent zur Pellschen-Gleichung ist. Wir erhalten somit

$$t_{1,2} = \frac{2ek^2q^2\lambda \mp \ell\sqrt{e}}{e(2k^2q^2 + 1)}.$$

Der Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ lässt sich analog berechnen. \square

Die zusätzliche Umformung des Nenners bei der Darstellung der Submaximalitäts-Gebiete mit Hilfe der Pellschen-Gleichung ist für die direkt folgenden Aussagen nicht notwendig. Wir werden allerdings in Abschnitt 3.1.4 sehen, dass diese Darstellung eine bessere Abschätzung für die Länge der Intervalle zulässt (siehe Lemma 3.1.17).

Die Struktur der Intervallgrenzen offenbart eine wichtige Eigenschaft der submaximalen Kurven:

Proposition 3.1.10. *Seien C_1 und C_2 submaximale Kurven auf X . Dann grenzen die Submaximalitäts-Gebiete $\text{SG}(C_1) = (t_1, t_2)$ und $\text{SG}(C_2) = (s_1, s_2)$ niemals aneinander, d. h. $t_1 \neq s_2$ und $t_2 \neq s_1$.*

Beweis. Aus Lemma 3.1.9 folgt, dass die linke Intervallgrenze immer von der Form $a - b\sqrt{e}$ für $a \in \mathbb{Q}$ und $b \in \mathbb{Q}_{>0}$ ist, während die rechte Intervallgrenze immer von der Form $a' + b'\sqrt{e}$ für $a' \in \mathbb{Q}$ und $b' \in \mathbb{Q}_{>0}$ ist. Da 1 und \sqrt{e} eine Basis des \mathbb{Q} -Vektorraums $\mathbb{Q}(\sqrt{e})$ bilden, können linke und rechte Intervallgrenzen niemals übereinstimmen. \square

Während die Seshadri-Funktion in Umgebungen von L_λ mit $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ linear oder stückweise linear ist, unterscheidet sich die lokale Struktur in Umgebungen von λ mit $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ wesentlich von diesen Fällen: Seshadri-Konstanten können per Definition immer als Infimum von unendlich vielen linearen Funktionen dargestellt werden (siehe Lemma 1.1.3) und im Fall $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ lässt sich die Struktur der Seshadri-Funktion auf X lokal nicht vereinfachen.

Korollar 3.1.11. *Sei L_λ ein amples \mathbb{R} -Geradenbündel mit $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$. Dann ist die Seshadri-Funktion in keiner Umgebung U von λ stückweise linear.*

Beweis. Wenn die Seshadri-Funktion stückweise linear in einer Umgebung von λ wäre, dann müsste die Seshadri-Funktion nahe λ durch zwei lineare Funktionen ℓ_1 und ℓ_2 mit $\ell_1(\lambda) = \ell_2(\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ bestimmt werden. Dies ist aber nach Prop. 3.1.10 unmöglich. \square

Durch die Einschränkung von Prop. 3.1.10 können wir außerdem die numerische Klasse der Seshadri-Kurven im Fall $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ bestimmen:

Korollar 3.1.12. *Sei L ein primitives amples Geradenbündel mit $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ und sei C eine Seshadri-Kurve von L . Dann gilt $C \equiv nL$ und $\text{mult}_0 C = n\sqrt{L^2}$ für ein passendes $n \in \mathbb{N}$ sowie*

$$\varphi_C(t) = \frac{L_t \cdot L}{\sqrt{L^2}}.$$

Insbesondere definiert jede Seshadri-Kurve von L die gleiche lineare Funktion.

Beweis. Sei C eine Seshadri-Kurve von L . Dann erhalten wir unter Verwendung des Hodge-Index-Satzes

$$\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} = \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{\sqrt{L^2} \sqrt{C^2}}{\text{mult}_0 C},$$

und somit ist C schwach submaximal für $\mathcal{O}_X(C)$. Wir bezeichnen mit L_{t_1} bzw. L_{t_2} die zu $\mathcal{O}_X(C)$ bzw. L gehörigen Geradenbündel. Wir nehmen an, dass $\mathcal{O}_X(C)$ kein numerisches Vielfaches von L ist, d. h. es gilt $t_1 \neq t_2$. Für die lineare Funktion φ_C erhalten wir

$$\varphi_C(t_1) \leq \sqrt{L_{t_1}^2} \quad \text{und} \quad \varphi_C(t_2) = \sqrt{L_{t_2}^2}.$$

Da die Funktion $t \mapsto \sqrt{L_t^2}$ konkav ist, ist C submaximal für alle Geradenbündel zwischen t_1 und t_2 . Somit sind die Grenzen des Submaximalitäts-Gebiet von C von der Form $a + b\sqrt{e}$ mit $b \neq 0$. Das liefert jedoch einen Widerspruch, da $t_2 \in \mathbb{Q}$ eine Grenze des Submaximalitäts-Gebietes wäre. Folglich muss $t_1 = t_2$ gelten. Da L nach Voraussetzung primitiv ist, ist C ein numerisches Vielfaches von L . \square

Theorem 3.1.13. *Sei X eine prinzipalpolarisierte einfache abelsche Fläche vom Rang 2, so dass jedes nef \mathbb{R} -Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt (z.B. falls $\text{End}^{\text{sym}}(X)$ wie in Thm. 3.1.3 ist). Dann ist die Seshadri-Funktion zerbrochen linear.*

Beweis. Aus Thm. 3.1.3 folgt, dass die Seshadri-Funktion in der Umgebung eines jeden Punktes $t \in \mathcal{N}(X)$ mit $\varepsilon(L_t) < \sqrt{L_t^2}$ linear ist und deren maximalen Intervalle grenzen nach Prop. 3.1.10 nicht aneinander. Das nachfolgende Lemma 3.1.14 zeigt, dass die Menge $M(X) = \left\{ t \in \mathcal{N}(X) \mid \varepsilon(L_t) = \sqrt{L_t^2} \right\}$ nirgends dicht und unendlich ist. \square

Lemma 3.1.14. *Sei X eine prinzipalpolarisierte abelsche Fläche mit $\rho = 2$, dann besitzt die Menge $M(X) = \left\{ t \in \mathcal{N}(X) \mid \varepsilon(L_t) = \sqrt{L_t^2} \right\}$ unendlich viele Elemente und ist nirgends dicht.*

Beweis. Wir betrachten ample Geradenbündel der Form $L = qL_0 + 4pL_\infty$ mit $q \in \mathbb{N}$ ungerade und $p \in \mathbb{Z}$. Der Selbstschnitt L^2 kann in diesen Fällen keine Quadratzahl sein, denn L^2 ist kongruent 2 modulo 4. Dies liefert uns in $\mathcal{N}(X)$ eine dichte Teilmenge von amplen Geradenbündeln $L_{4p/q}$ mit $\varepsilon(L_{4p/q}) < \sqrt{L_{4p/q}^2}$. Da die Seshadri-Funktion stetig ist, erhalten wir für jedes dieser Bündel eine offene Umgebung, in der die Seshadri-Konstante kleiner als die obere Schranke $t \mapsto \sqrt{L_t^2}$ ist. Folglich ist die Menge $M(X)$ nirgends dicht.

Wenn die Menge $M(X)$ endlich wäre, dann impliziert dies, dass es nur endlich viele submaximale Kurven auf X gibt. Dies hätte jedoch zur Folge, dass die Submaximalitäts-Gebiete aneinandergrenzen. \square

Bemerkung 3.1.15. Auch wenn wir die globale Struktur der Seshadri-Funktion im Fall einer submaximalen Kurve beschrieben haben, so bleiben an dieser Stelle weiterhin einige Fragen offen:

1. Im Fall, dass jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt, lässt sich ähnlich wie bei der Cantor-Menge argumentieren, dass die Menge $M(X)$ unendlich ist. Mit diesem Argument folgt sogar, dass die Menge $M(X)$ perfekt und somit insbesondere überabzählbar ist. Da die Intervallgrenzen in $\mathbb{Q}(\sqrt{e})$ liegen, muss es überabzählbar viele transzendente Zahlen in $M(X)$ geben. Außerdem ist nicht klar, welche expliziten Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{e})$ in $M(X)$ enthalten sind, da die Intervallgrenzen abhängig von der Lösung der Pellschen-Gleichungen sind.
2. Man könnte hoffen, dass die Struktur der Seshadri-Funktion im Fall von höchstens zwei submaximalen Kurven ähnlich zu dem Fall mit höchstens einer submaximalen Kurve ist, indem wir in der Definition für „zerbrochen linear“ anstelle von linearen Segmenten auch stückweise lineare Segmente zulassen. Allerdings können wir nicht ausschließen, dass der Funktionsgraph der Seshadri-Funktion Ketten von unendlich vielen linearen Segmenten enthält, die sich Intervallgrenzen annähern. Ein solcher Fall liegt auf nicht-einfachen abelschen Flächen vor (siehe Abb. 3.19). Einerseits bedeutet dies, dass es maximale Intervalle in $\mathcal{N}(X) \setminus M(X)$ geben könnte, auf denen die Seshadri-Funktion eventuell nicht stückweise linear ist, und andererseits könnten die maximalen Intervalle in $\mathcal{N}(X) \setminus M(X)$ aneinander grenzen. Diese denkbaren Szenarien führen dazu, dass wir keine genauere Aussage über die Seshadri-Funktion und auch über $M(X)$ machen können, denn $M(X)$ könnte sowohl eine perfekte Menge sein als auch nur aus isolierten Punkten bestehen. Genauso denkbar ist es aber auch, dass $M(X)$ eine perfekte und isolierte Teilmenge besitzt. Die Aussage von Kor. 2.2.8 deutet jedoch an, dass es viele submaximale Kurven C geben könnte, die keine anderen submaximalen Kurven in $\text{SG}(C)$ zulassen und daher könnten die Seshadri-Funktionen im Fall von zwei submaximalen Kurven vermutlich ähnliche Eigenschaften aufweisen, wie zerbrochen lineare Funktionen.

3.1.4. Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten und der Seshadri-Kurven

In diesem Abschnitt werden wir einen Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten und der Seshadri-Kurven für beliebige ample \mathbb{Q} -Geradenbündel herleiten. Grundlage für den Algorithmus wird das notwendige Kriterium Prop. 1.1.12 an Seshadri-Kurven sein, welches besagt, dass die Seshadri-Kurve von L_λ in einem bestimmten Bereich submaximal ist.

Notation 3.1.16. Sei L_λ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel. Falls $\sqrt{L_\lambda^2} \notin \mathbb{Q}$ gilt, dann liefert die Pell-Schranke von L_λ eine obere Schranke für die Seshadri-Konstante. Wir bezeichnen mit I_λ das Intervall auf dem jede Seshadri-Kurve von L_λ submaximal ist (siehe Prop. 1.1.12) und mit s_λ die Länge von I_λ .

Falls $\sqrt{L_\lambda^2} \in \mathbb{Q}$ gilt, dann ist die Seshadri-Konstante unter der Annahme $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ nach oben durch $\frac{2L_\lambda^2-1}{2\sqrt{L_\lambda^2}}$ beschränkt (siehe Kor. 2.1.11). In diesem Fall bezeichnen wir mit

I_λ das hypothetische Intervall, auf dem die Seshadri-Kurve von L_λ unter der Annahme $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ submaximal wäre.

Wir müssen also bei der Suche nach der Seshadri-Kurve von L_λ nur diejenigen Pell-Schranken betrachten, deren Submaximalitäts-Gebiete mindestens die Länge s_λ besitzen. Um dies auszunutzen, werden wir die Länge der Submaximalitäts-Gebiete von Pell-Schranken abschätzen. Überraschenderweise können wir die Länge des Submaximalitäts-Gebiet von $\pi_{p/q}$ allein durch q ausdrücken. Die Abschätzung ist daher insbesondere unabhängig von der Pellschen-Gleichung:

Lemma 3.1.17. *Sei $L_{p/q}$ ein amplex \mathbb{Q} -Geradenbündel mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Dann ist die Länge des Submaximalitäts-Gebiets $\text{SG}(\pi_{p/q}) = (t_1, t_2)$ beschränkt durch*

$$t_2 - t_1 < \frac{\sqrt{11}}{q\sqrt{e}}.$$

Beweis. Sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - (qL_{p/q})^2 = 1$. Die Pellsche-Gleichung ist äquivalent zu der Identität

$$\frac{\ell}{kq} = \sqrt{L_{p/q}^2 + \frac{1}{k^2q^2}}.$$

Die explizite Darstellung der Intervalle in Lemma 3.1.9 erlaubt es die Länge zu berechnen und abzuschätzen. Im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ erhalten wir

$$t_2 - t_1 = \frac{2\frac{\ell}{kq}}{\sqrt{e}(2kq + \frac{1}{kq})} = \frac{2\sqrt{L_{p/q}^2 + \frac{1}{k^2q^2}}}{\sqrt{e}(2kq + \frac{1}{kq})} = \frac{2\sqrt{2 - \frac{2ek^2p^2-1}{k^2q^2}}}{\sqrt{e}(2kq + \frac{1}{kq})} < \frac{\sqrt{2}}{q\sqrt{e}}.$$

Im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ ergibt sich

$$t_2 - t_1 = \frac{4\frac{\ell}{kq}\sqrt{e}}{\frac{e-1}{kq} + 2ekq} = \frac{4\sqrt{e}\sqrt{2 + 2\frac{p}{q} - \frac{e-1}{2}\frac{p^2}{q^2} + \frac{1}{k^2q^2}}}{\frac{e-1}{kq} + 2ekq} < \frac{2\sqrt{2 + \frac{2}{e-1} + \frac{1}{k^2q^2}}}{q\sqrt{e}} < \frac{\sqrt{11}}{q\sqrt{e}},$$

wobei wir in der ersten Abschätzung verwenden, dass die Funktion $\lambda \mapsto 2\lambda - \frac{e-1}{2}\lambda^2$ das Maximum $\frac{2}{e-1}$ besitzt. Im letzten Schritt verwenden wir einerseits, dass $e \geq 5$ gilt, und andererseits, dass wir $\frac{1}{k^2q^2}$ durch $\frac{1}{4}$ abschätzen können, indem wir für $q = 1$ explizit alle möglichen auftretenden Pellschen-Gleichungen und deren primitiven Lösungen betrachten: Im Fall $p = 0$ liegt die Prinzipalpolarisierung L_0 vor und dort haben wir die primitive Lösung $(\ell, k) = (3, 2)$. Im Fall $p \neq 0$ ist $L_0 + pL_\infty$ genau dann ample, wenn $e = 5$ und $p = 1$ gilt. Auch in diesem Fall ist $L_0 + L_\infty$ eine Prinzipalpolarisierung und somit $k = 2$. \square

Bemerkung 3.1.18. Im letzten Schritt des Beweises hätten wir auch die offensichtliche Abschätzung $\frac{1}{k^2q^2} \leq 1$ verwenden können, womit wir

$$\frac{2\sqrt{2 + \frac{2}{e-1} + \frac{1}{k^2q^2}}}{q\sqrt{e}} < \frac{\sqrt{14}}{q\sqrt{e}}$$

erhalten würden. Es stellt sich allerdings heraus, dass diese obere Schranke für eine spätere Anwendung (siehe Prop. 3.1.34) nicht ausreichend ist.

Das vorherige Lemma hat folgende wichtige Konsequenz:

Korollar 3.1.19. *Sei $I = (a, b) \subset \mathcal{N}(X)$ ein beliebiges Intervall mit $a < b$. Dann gibt es nur endlich viele Pell-Schranken π_λ , deren Submaximalitäts-Gebiet das Intervall I enthält.*

Beweis. Die Länge von I ist $s = b - a$. Damit eine Pell-Schranke π_λ submaximal im gesamten Intervall I ist, muss die Länge von $\text{SG}(\pi_\lambda)$ mindestens die Länge s besitzen. Mit Lemma 3.1.17 erhalten wir die folgende Bedingung an den Nenner von $\lambda = \frac{p}{q}$:

$$s \leq \frac{\sqrt{11}}{q\sqrt{e}}.$$

Also ist λ in der endlichen Menge

$$\left\{ \frac{a}{b} \in \mathcal{N}(X) \mid 1 \leq b \leq \frac{\sqrt{11}}{s\sqrt{e}} \right\}$$

enthalten. □

Wir können dieses Resultat auf das Intervall anwenden, auf dem die Seshadri-Kurve eines Geradenbündels L submaximal ist. Wir erhalten somit eine rein numerische Methode die Seshadri-Konstante zu berechnen:

Satz 3.1.20. *Sei L_λ ein \mathbb{Q} -Geradenbündel und sei $A_\lambda := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathcal{N}(X) \mid 1 \leq b \leq \frac{\sqrt{11}}{s_\lambda\sqrt{e}} \right\}$ die endliche Menge an Pell-Schranken, die auf I_λ submaximal sein können. Dann gilt*

$$\varepsilon(L_\lambda) = \min \left\{ \sqrt{L_\lambda^2}, \pi_{\frac{a}{b}}(\lambda) \mid \frac{a}{b} \in A_\lambda \right\}.$$

Außerdem: Falls $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ gilt, so ist jede Seshadri-Kurve C von L_λ durch eine eindeutige Pell-Schranke π_τ repräsentiert mit $\tau \in A_\lambda$ und $\varepsilon(L_\lambda) = \pi_\tau(\lambda)$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ gilt. Nach Prop. 1.1.12 ist eine Seshadri-Kurve C von L_λ auf dem Intervall I_λ mit der Länge s_λ submaximal. Sei π_τ die eindeutige Pell-Schranke mit $\varphi_C = \pi_\tau$, dann gilt $\tau \in A_\lambda$ und $\varepsilon(L_\lambda) = \pi_\tau(\lambda)$.

Im Fall $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$ folgt, dass es keine submaximalen Kurven für L_λ gibt. Somit gilt für alle Pell-Schranken $\sqrt{L_\lambda^2} \leq \pi_\mu(\lambda)$ und da die Grenzen der Submaximalitäts-Gebiete stets in $\mathbb{Q}(\sqrt{e}) \setminus \mathbb{Q}$ liegen, folgt sogar, dass die Ungleichung stets strikt ist. Daher müssen wir zusätzlich $\sqrt{L_\lambda^2}$ im Minimum aufnehmen. □

Bemerkung 3.1.21.

- (i) Der Fall, dass im Satz 3.1.20 mehrere Pell-Schranken die Seshadri-Konstante berechnen, kommt genau dann vor, wenn L_λ zwei Seshadri-Kurven besitzt. Wenn es nur eine Seshadri-Kurve gibt, dann ist die Seshadri-Funktion nach Satz 1.1.16 lokal linear. Somit müssen alle Pell-Schranken π_τ , die die Seshadri-Konstante von L_λ berechnen, die gleiche lineare Funktion erzeugen. Da allerdings die lineare Funktion der Seshadri-Kurve mit einer eindeutigen Pell-Schranke übereinstimmt, kann es nur genau eine Pell-Schranke geben, die die Seshadri-Konstante berechnet.
- (ii) Satz 3.1.20 gibt außerdem eine endliche Anzahl an Kandidaten von Pell-Schranken an, welche mit Seshadri-Kurven übereinstimmen können. Mit Hilfe von Kor. 2.3.4 (ii) können wir diejenigen Pell-Schranken identifizieren, die zu submaximalen Kurven gehören. Dies ermöglicht es explizit die Seshadri-Kurven zu bestimmen.

Da sämtliche Schritte zur Berechnung der Seshadri-Konstante und der Seshadri-Kurven algorithmisch berechenbar sind, erhalten wir:

Theorem 3.1.22. *Sei L ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X , dann gibt es einen effektiven Algorithmus, der die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Kurven von L bestimmt.*

Algorithmus 3.1.23. Wir beschreiben nun die notwendigen Schritte zur Bestimmung der Seshadri-Konstante und der Seshadri-Kurven eines amples \mathbb{Q} -Geradenbündels L_λ :

- 1a) Falls $\sqrt{L_\lambda^2} \notin \mathbb{Q}$ gilt, so bestimmen wir die Pell-Schranke π_λ , welche uns eine obere Schranke $R := \pi_\lambda(\lambda)$ für die Seshadri-Konstante gibt, d. h. $\varepsilon(L_\lambda) \leq R < \sqrt{L_\lambda^2}$.
- 1b) Falls $\sqrt{L_\lambda^2} \in \mathbb{Q}$ gilt, so bestimmen wir die hypothetische obere Schranke R unter der Annahme, dass $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ gilt (siehe Kor. 2.1.11).
- 2) Wir bestimmen mit Hilfe der oberen Schranke R das Intervall I_λ , auf dem die Seshadri-Kurve von L_λ submaximal ist, sowie die Länge s_λ des Intervalls.
- 3) Wir bestimmen die endliche Menge A_λ , die alle Pell-Schranken enthält, deren Submaximalitäts-Gebiet mindestens die Länge s_λ besitzt.
- 4) Wir bestimmen $\min \{ \pi_\mu(\lambda) \mid \pi_\mu \text{ Pell-Schranke mit } \mu \in A_\lambda \}$.
- 5a) Falls das Minimum in 4) kleiner als $\sqrt{L_\lambda^2}$ ist, so ist das Minimum die Seshadri-Konstante von L_λ .
- 5b) Falls das Minimum in 4) größer als $\sqrt{L_\lambda^2}$ ist oder die Menge A_λ leer ist, so war die Annahme $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ in 1b) falsch und es gilt $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2}$. In diesem Fall liefert Kor. 3.1.12 die Seshadri-Kurven.
- 6) Zur Bestimmung der Pell-Schranken, welche zu den submaximalen Seshadri-Kurven gehören, verwenden wir Kor. 2.3.4 (ii). Wir wenden die Schritte 1) bis 3) auf diejenigen Geradenbündel L_τ an, die zu den Pell-Schranken π_τ mit $\pi_\tau(\lambda) = \varepsilon(L_\lambda)$ gehören, und prüfen dann, ob π_τ die Seshadri-Konstante von L_τ bestimmt. Ist dies der Fall, so ist π_τ die lineare Funktion einer submaximalen Kurve.

Bemerkung 3.1.24. Bei amplen \mathbb{Q} -Geradenbündeln L_λ mit $\sqrt{L_\lambda^2} \in \mathbb{Q}$ führen wir die Rechnung zunächst unter der Annahme durch, dass $\varepsilon(L_\lambda^2) < \sqrt{L_\lambda}$ gilt. Eine naheliegende Frage ist, ob überhaupt beide Fälle auftreten können. Dies ist tatsächlich der Fall: Wir betrachten dazu eine prinzipalpolarisierte abelsche Fläche X mit reeller Multiplikation $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \text{End}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Dann ist die Seshadri-Konstante von $L = 2L_0 + L_\infty$ gegeben durch $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} = 2$. Das Geradenbündel $L' = 58L_0 + L_\infty$ besitzt eine submaximale Seshadri-Konstante, denn die Seshadri-Kurve C_0 von L_0 ist submaximal für L' und bestimmt nach Bsp. 2.2.9 die Seshadri-Konstante von L' . Genauer gilt: $\varepsilon(L') = L' \cdot C_0 / \text{mult}_0 C_0 = \frac{232}{3} < \sqrt{L'^2} = 82$.

3.1.5. Fundamental-Kegel und Beispiele für Seshadri-Funktionen

Wir werden in diesem Abschnitt die Untergruppe $G \subset \text{Aut}(\text{NS}(X))$ der Isometrien bzgl. des Schnittproduktes bestimmen, welche den Ample-Kegel invariant lassen. Nach Thm. 2.2.4 bleibt die Seshadri-Funktion invariant unter dieser Gruppe. Insbesondere gilt also $\varepsilon(L) = \varepsilon(\phi(L))$ für alle $\phi \in G$ und alle $L \in \text{Nef}(X)$. Wir werden sehen, dass diese Gruppe eine Zerlegung des Ample-Kegels in unendlich viele Teilkegel induziert, auf der die Gruppe G transitiv wirkt. Somit wird die gesamte Seshadri-Funktion bereits durch jeden dieser Teilkegel vollständig definiert.

Wir fixieren eine Basis (L_0, L_∞) wie in Abschnitt 3.1.1. In dieser Basis ist ein Automorphismus $\phi \in \text{Aut}(\text{NS}(X))$ gegeben durch eine Matrix der Form

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}).$$

Die Bedingungen, dass ϕ eine Isometrie von $\text{NS}(X)$ bzgl. des Schnittproduktes ist und den Ample-Kegel invariant lässt, lassen sich wie folgt ausdrücken:

- (I) $L_0^2 = (\alpha L_0 + \gamma L_\infty)^2$,
- (II) $L_\infty^2 = (\beta L_0 + \delta L_\infty)^2$,
- (III) $L_0 \cdot L_\infty = (\alpha L_0 + \gamma L_\infty) \cdot (\beta L_0 + \delta L_\infty)$,
- (IV) $\alpha > 0$.

Dabei sind die Bedingungen (I)–(III) äquivalent dazu, dass ϕ eine Isometrie ist, während Bedingung (IV) zusätzlich sicher stellt, dass der Ample-Kegel invariant bleibt.

$\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$: In diesem Fall ergibt sich, dass die zugehörige Matrix M eines Automorphismus unter Berücksichtigung von (I)–(IV) von folgender Form ist:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & e\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \alpha & -e\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \alpha > 0 \text{ und } \alpha^2 - e\beta^2 = 1.$$

Wir sehen insbesondere, dass (α, β) eine Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - ey^2 = 1$ ist. Da jede Lösung der Pellischen-Gleichung durch die primitive Lösung (α_0, β_0) erzeugt wird, wird die Gruppe G durch die beiden Automorphismen

$$\phi_0 := \begin{pmatrix} \alpha_0 & e\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

erzeugt. Der Automorphismus ϕ_0 liefert eine Möglichkeit alle Prinzipalpolarisierungen zu bestimmen:

Lemma 3.1.25. *Sei $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ und L eine Prinzipalpolarisierung auf X . Weiter sei (α_0, β_0) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - ey^2 = 1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass L von der Form $L_k := x_k L_0 + y_k L_\infty$ ist, wobei gilt*

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & e\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \phi_0^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren für $k \in \mathbb{Z}$ die Unterkegel $\mathcal{D}_k \subset \text{Amp}(X)$, welche von L_k und L_{k+1} erzeugt werden. Wegen $\phi_0(L_k) = L_{k+1}$ folgt, dass $\phi_0^k(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_k$ gilt. Wir können \mathcal{D}_0 weiter in Unterkegel $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$ unterteilen, indem wir zusätzlich den Automorphismus τ verwenden: Der Automorphismus $\phi_0 \circ \tau$ ist von Ordnung zwei und bildet den Unterkegel \mathcal{D}_0 auf sich selbst ab. Der von $L' := e\beta_0 L_0 + (\alpha_0 - 1)L_\infty$ erzeugte Strahl wird von $\phi_0 \circ \tau$ festgehalten und zerlegt \mathcal{D}_0 in zwei Unterkegel $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$. Dabei wird $\mathcal{D}_{0,1}$ von L_0 und L' erzeugt, d. h.

$$\mathcal{D}_{0,1} = \mathbb{R}_{>0} \cdot \{ (1 - \lambda)L_0 + \lambda L' \mid \lambda \in [0, 1] \},$$

und $\mathcal{D}_{0,2}$ wird von L' und L_1 erzeugt. Für die Kegel gilt $\phi_0 \circ \tau(\mathcal{D}_{0,1}) = \mathcal{D}_{0,2}$. Wir nennen $\mathcal{D}_{0,1}$ den *Fundamental-Kegel* of $\text{Amp}(X)$ und dieser entspricht dem *Fundamental-Intervall* $[0, \frac{\alpha_0 - 1}{e\beta_0}]$ in $\mathcal{N}(X)$. Die Zerlegung von \mathcal{D}_0 in $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$ überträgt sich via ϕ_0^k auf jeden Unterkegel \mathcal{D}_k . Nach Umnummerierung erhalten wir eine Zerlegung des Ample-Kegels in Unterkegel \mathcal{C}_k mit $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_{0,1}$.

Die Geradenbündel $\phi_0^k(L')$ haben eine weitere interessante Eigenschaft, was die Berechnung der Seshadri-Konstante von diesen Bündeln vereinfacht:

Lemma 3.1.26. *Sei $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ und $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathbb{N}^2$ die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - ey^2 = 1$. Dann gilt für $L' = e\beta_0 L_0 + (\alpha_0 - 1)L_\infty$ entweder*

- (i) $\sqrt{L'^2} \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon(L') = \sqrt{L'^2}$, oder
- (ii) $\sqrt{L'^2} \notin \mathbb{Z}$ und L' besitzt einen eindeutigen Pell-Divisor C oder $2C$, wobei C die Seshadri-Kurve L' ist.

Die Aussage setzt sich via ϕ_0 auf alle Geradenbündel $\phi_0^k(L')$ fort.

Beweis. Wir müssen ausschließen, dass es eine Kurve C gibt, die für L' submaximal ist und kein rationales Vielfaches von L' ist. Angenommen es gäbe eine solche Kurve C , dann liefert uns der Automorphismus $\phi_0 \circ \tau$ mit Kor. 2.2.5 eine weitere von C verschiedene irreduzible Kurve C' mit $\text{mult}_0 C = \text{mult}_0 C'$, für die

$$\frac{C \cdot L'}{\text{mult}_0 C} = \frac{\phi_0 \circ \tau(C) \cdot \phi_0 \circ \tau(L')}{\text{mult}_0 C} = \frac{C' \cdot L'}{\text{mult}_0 C'}$$

gilt. Also besitzt L' zwei submaximale Kurven, was nach Thm. 3.1.3 unmöglich ist. \square

End^{sym}(X) = $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$: Die Bedingungen (I)–(IV) ergeben in diesem Fall, dass die zugehörige Matrix eines Automorphismus aus G von der Form

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{e-1}{4}\beta \\ \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} \alpha & \alpha - \frac{e-1}{4}\beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{mit } \alpha > 0 \text{ und } \alpha^2 + \alpha\beta - \frac{e-1}{4}\beta^2 = 1$$

ist. In dieser Situation ist (α, β) eine Lösung der Gleichung $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1$. Mit Hilfe der Bijektion

$$\begin{aligned} \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 - ey^2 = 4 \} &\xrightarrow{\sim} \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1 \} \\ (x, y) &\mapsto (\frac{x-y}{2}, y) \end{aligned}$$

können wir anstelle der Gleichung $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1$ die verallgemeinerte Pellische-Gleichung $x^2 - ey^2 = 4$ betrachten. Nach [14, Prop. 6.3.16] lässt sich die Menge der Lösungen von $x^2 - ey^2 = 4$ durch eine primitive Lösung (x_0, y_0) mit $x_0 > y_0 > 0$ wie folgt ausdrücken:

$$\left\{ \pm \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} x_0 & ey_0 \\ y_0 & x_0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dies ermöglicht es uns, die Menge der Lösungen der Gleichung $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1$ zu bestimmen. Wir setzen $(\alpha_0, \beta_0) := (\frac{x_0 - y_0}{2}, y_0)$ und erhalten daher die Lösungsmenge

$$\left\{ \pm \begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{e-1}{4}\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 + \beta_0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Folglich ist die Gruppe G erzeugt durch

$$\psi_0 := \begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{e-1}{4}\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 + \beta_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten auch in diesem Fall eine Darstellung der Prinzipalpolarisierungen:

Lemma 3.1.27. *Sei $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ und L eine Prinzipalpolarisierung auf X . Weiter sei (α_0, β_0) die primitive Lösung der Gleichung $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass L von der Form $L_k := x_k L_0 + y_k L_\infty$ ist, wobei*

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \frac{e-1}{4}\beta_0 \\ \beta_0 & \alpha_0 + \beta_0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_0^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Zerlegung des Ample-Kegels argumentieren wir wie im Fall $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$: Wir definieren für $k \in \mathbb{Z}$ die Unterkegel $\mathcal{D}_k \subset \text{Amp}(X)$, welche von L_k und L_{k+1} erzeugt werden. Durch $\psi_0 \circ \sigma$ erhalten wir eine Zerlegung von \mathcal{D}_0 in Unterkegel $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$, wobei $\mathcal{D}_{0,1}$ von L_0 und $L' := (\alpha_0 + 1)L_0 + \beta_0 L_\infty$ und $\mathcal{D}_{0,2}$ von L' und L_1 erzeugt wird. Wir nennen $\mathcal{D}_{0,1}$ den *Fundamental-Kegel* of $\text{Amp}(X)$ und dieser entspricht dem *Fundamental-Intervall* $[0, \frac{\beta_0}{\alpha_0 + 1}]$ in $\mathcal{N}(X)$. Die Zerlegung von \mathcal{D}_0 in $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$ überträgt sich via ψ_0^k auf jeden Unterkegel \mathcal{D}_k . Nach Umnummerierung erhalten wir eine Zerlegung des Ample-Kegels in Unterkegel \mathcal{C}_k mit $\mathcal{C}_0 = \mathcal{D}_{0,1}$.

Wie zuvor, lassen sich die Seshadri-Konstanten der Geradenbündel $\psi_0^k(L')$ besonders leicht berechnen, falls jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt:

Lemma 3.1.28. *Sei X eine abelsche Fläche mit $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$, so dass alle $L \in \text{Nef}(X)$ höchstens eine submaximale Kurve besitzen (z.B. falls $\text{End}^{\text{sym}}(X)$ wie in Thm. 3.1.3 ist). Weiter sei (α_0, β_0) die primitive Lösung von $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}y^2 = 1$. Dann gilt für $L' = (\alpha_0 + 1)L_0 + \beta_0 L_\infty$ entweder*

- (i) $\sqrt{L'^2} \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon(L') = \sqrt{L'^2}$, oder
- (ii) $\sqrt{L'^2} \notin \mathbb{Z}$ und L' besitzt einen eindeutigen Pell-Divisor C oder $2C$, wobei C die Seshadri-Kurve L' ist.

Die Aussage setzt sich via ψ_0 auf alle Geradenbündel $\psi_0^k(L')$ fort.

Wir fassen somit zusammen:

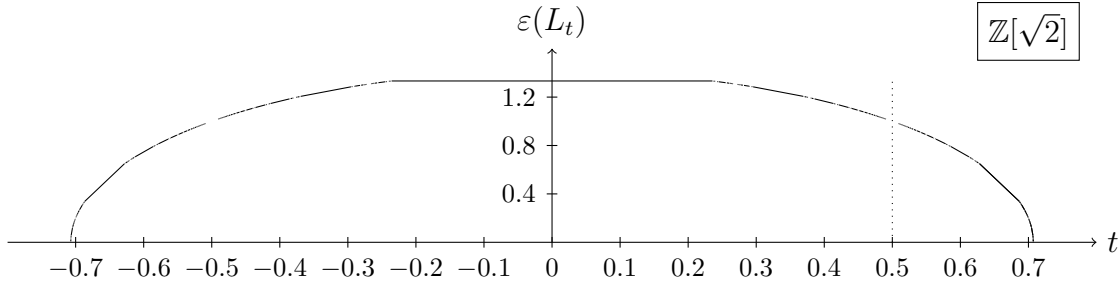
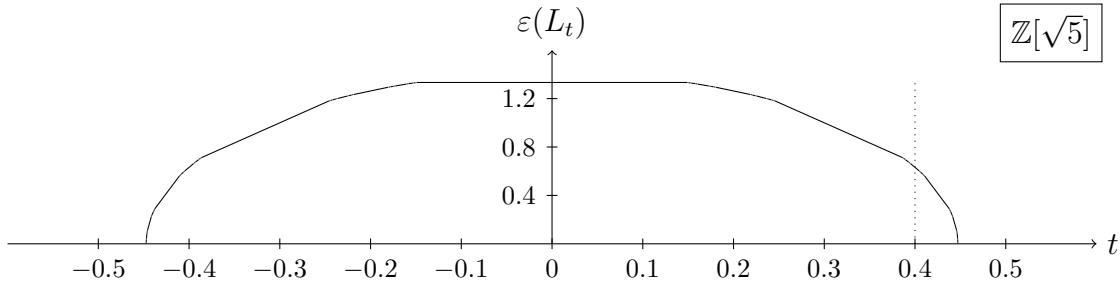
Theorem 3.1.29. *Es gibt eine Zerlegung des Ample-Kegels in unendlich viele Unterkegel \mathcal{C}_k mit $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Gruppe G der Isometrien von $\text{NS}(X)$, welche die Seshadri-Funktion invariant lassen, transitiv auf der Menge der Unterkegel wirkt. Insbesondere wird die Seshadri-Funktion bereits durch die Werte auf einem Unterkegel \mathcal{C}_k vollständig bestimmt.*

Für explizite Berechnung genügt es daher die Seshadri-Funktion auf dem Fundamentalintervall zu untersuchen.

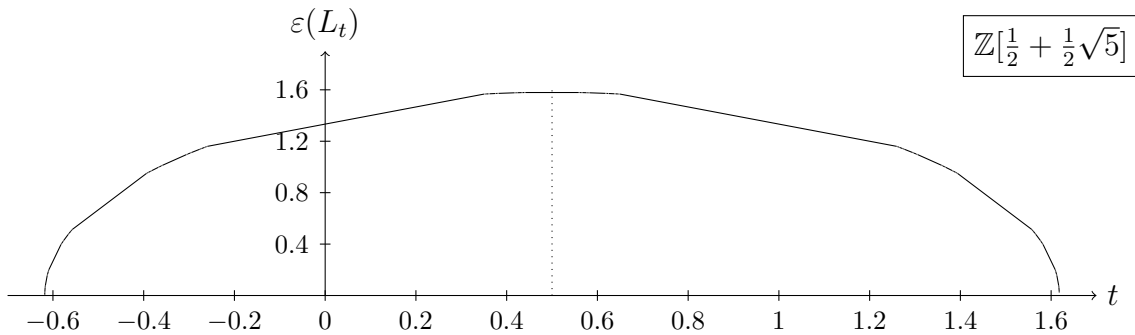
3.1.6. Beispiele für Graphen von Seshadri-Funktionen:

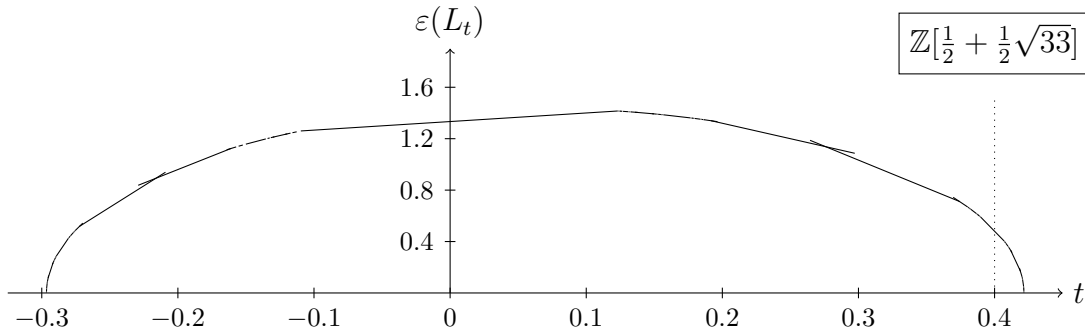
Um das Verhalten der Seshadri-Funktionen zu illustrieren, werden wir Beispiele mit den vorherigen Methoden konstruieren. Wir werden dazu für fixierte Endomorphismenringe alle submaximalen Seshadri-Kurven $C = qL_0 + pL_\infty$ bestimmen, so dass C im Fundamentalkegel \mathcal{C}_0 liegt und $q \leq 3.000$ gilt. Aus dieser Menge von Kurven können wir mit Kor. 2.2.5 durch die Automorphismengruppe G des vorherigen Abschnittes weitere submaximale Seshadri-Kurven bestimmen. Wir werden für eine submaximale Kurve die zugehörige lineare Funktion auf ihrem vollständigen Submaximalitäts-Gebiet einzeichnen, um Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven leichter darstellen zu können. Wir beschränken uns dabei auf jene Kurven, deren Submaximalitäts-Intervall mindestens die Länge 10^{-6} besitzt. In den Graphen gibt die gepunktete Linie das zum Fundamentalkegel gehörige Intervall an, aus dem sich die vollständige Seshadri-Funktion nach Thm. 3.1.29 bestimmen lässt.

Die Endomorphismenringe in den Abb. 3.7 – 3.10 sind so gewählt, dass sie verschiedene Strukturen darstellen: Im Fall $\mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ besteht der Graph aus linearen Segmenten, welche niemals aneinander grenzen oder sich überschneiden. Für $e = 2$ existieren \mathbb{Q} -Geradenbündel L_λ mit $\varepsilon(L_\lambda) = \sqrt{L_\lambda^2} \in \mathbb{Q}$, während im Fall $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ keine solchen Geradenbündel existieren. Diese Geradenbündel erzeugen „Lücken“ in dem Graphen, da sich in diesen Punkten lineare Segmente von beiden Seiten dem Punkt anhäufen. Im Fall $e = 2$ liegt eine solcher Fall im Punkt $t = 0.5$ vor. Diese Lücken schließen sich auch bei Verwendung einer größeren Schranke $q \leq M$ und bei Vernachlässigung der Mindestlänge 10^{-6} der Submaximalitäts-Bereiche nur sehr langsam. Die dort auftretenden Seshadri-Kurven besitzen somit extrem kleine Submaximalitäts-Gebiete.


 Abb. 3.7: Die Seshadri-Funktion einer p.p. abelschen Fläche mit reeller Multiplikation in $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

 Abb. 3.8: Die Seshadri-Funktion einer p.p. abelschen Fläche mit reeller Multiplikation in $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

Die Graphen im Fall $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ sind nicht symmetrisch in 0 wie im Fall $\mathbb{Z}[\sqrt{e}]$. Im Fall $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}]$ ist die Seshadri-Funktion symmetrisch in $\frac{1}{2}$, aber ansonsten weist die Funktion für andere Werte e keine Symmetrie auf. Für $e = 5$ besteht die Funktion nach Thm. 3.1.3 aus linearen Segmenten, welche niemals aneinander grenzen und sich niemals überlappen. Im Fall $e = 33$ existieren Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven, z.B. für $t \approx 0.28$. Berechnungen zeigen sogar, dass es Ketten von überlappenden linearen Segmenten gibt. Erwähnenswert ist außerdem, dass die Größe des Fundamental-Intervalls stark von der minimalen Lösung von $x^2 - ey^2 = 1$ bzw. $x^2 + xy - \frac{e-1}{4}x^2 = 1$ abhängt: In den ersten drei Fällen sind die minimalen Lösungen relativ klein und somit sind die Fundamental-Intervalle ebenfalls klein. Vergleicht man die Intervallgrenzen des Fundamental-Intervalls mit den Grenzen des Ample-Kegel in weiteren Beispielen, so stellt man fest, dass diese beliebig nah an die Intervallgrenzen reichen können.


 Abb. 3.9: Die Seshadri-Funktion einer p.p. abelschen Fläche mit reeller Multiplikation in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}]$.


 Abb. 3.10: Die Seshadri-Funktion einer p.p. abelschen Fläche mit reeller Multiplikation in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{33}]$.

3.1.7. Numerisches Kriterium zur Bestimmung der maximalen Anzahl von submaximalen Kurven

In diesem Abschnitt werden wir eine numerische Methode herleiten, um zu entscheiden, ob alle Geradenbündel auf X höchstens eine submaximale Kurve besitzen oder ob es Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven gibt. Wegen Thm. 3.1.3 ist bereits bekannt, dass es unendlich viele Fälle für $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ gibt, so dass jedes Geradenbündel auf X höchstens eine submaximale Kurve hat. Wir werden zeigen, dass es ebenfalls unendlich viele Flächen X gibt, auf denen Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven existieren.

Proposition 3.1.30. *Auf X existiert ein amples Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven genau dann, wenn es zwei Pell-Schranken π_λ und π_μ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

- (i) *Für die Submaximalitäts-Gebiete von π_λ und π_μ gilt $\text{SG}(\pi_\lambda) \cap \text{SG}(\pi_\mu) \neq \emptyset$.*
- (ii) *Es existiert keine Pell-Schranke π_τ mit $\text{SG}(\pi_\mu) \cup \text{SG}(\pi_\lambda) \subset \text{SG}(\pi_\tau)$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass es ein amples Geradenbündel L auf X mit zwei submaximalen irreduziblen Kurven C_1 und C_2 gibt. Die linearen Funktionen φ_{C_1} und φ_{C_2} sind Pell-Schranken nach Thm. 2.2.1 und ihre Submaximalitäts-Gebiete $\text{SG}(C_1)$ und $\text{SG}(C_2)$ müssen sich schneiden, da sowohl C_1 als auch C_2 submaximal für L sind. Wir nehmen nun an, dass es eine Pell-Schranke π_τ gäbe, dessen Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(\pi_\tau)$ das Intervall $\text{SG}(C_1) \cup \text{SG}(C_2)$ enthält. Folglich ist jeder Pell-Divisor P von L_τ submaximal auf $\text{SG}(C_1) \cup \text{SG}(C_2)$. Dann wären C_1 und C_2 nach Lemma 1.1.21 aber reduzibel, ein Widerspruch.

Für die andere Implikation seien π_λ und π_μ zwei Pell-Schranken, welche (i) und (ii) erfüllen. Diese Pell-Schranken liefern auf $I := \text{SG}(\pi_\mu) \cup \text{SG}(\pi_\lambda)$ eine obere Schranke für die Seshadri-Funktion, denn es gilt

$$\varepsilon(t) \leq \min\{\pi_\lambda(t), \pi_\mu(t)\} < \sqrt{L_t^2} \quad \text{für alle } t \in I.$$

Sei C_1 die Seshadri-Kurve für ein beliebiges Geradenbündel L_{t_1} mit $t_1 \in I$. Wegen der Annahme (ii) kann das Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(C_1)$ nicht das Intervall I enthalten.

Wegen der Stetigkeit der linearen Funktionen und der oberen Schranke $t \mapsto \sqrt{L_t^2}$, existiert ein Geradenbündel L_{t_2} mit $t_2 \in I \cap \text{SG}(C_1)$, so dass gilt:

$$\varepsilon(L_{t_2}) \leq \min\{\pi_\lambda(t_2), \pi_\mu(t_2)\} < \varphi_{C_1}(t_2) < \sqrt{L_{t_2}^2},$$

d. h. C_1 ist submaximal für L_{t_2} , aber berechnet dessen Seshadri-Konstante nicht. Da jedoch die Seshadri-Konstante von L_{t_2} von einer Kurve berechnet werden muss, besitzt das Geradenbündel L_{t_2} eine weitere submaximale Kurve C_2 . Somit folgt, dass L_{t_2} zwei submaximale Kurven besitzt. \square

Mit diesem Kriterium können wir numerisch nach Geradenbündeln mit zwei submaximalen Kurven suchen: Zunächst suchen wir nach Pell-Schranken, deren Submaximalitäts-Gebiete überlappen, und anschließend prüfen wir mit Kor. 3.1.19, ob Bedingung (ii) für eine andere Pell-Schranke erfüllt ist. Leider terminiert die Suche nur in den Fällen, in denen ein Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven existiert. Berechnungen in Maple (siehe Anhang) zeigen:

Proposition 3.1.31. *Sei $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl $e \leq 25.000$ mit $e \equiv 1 \pmod{4}$, wobei e keinen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$ besitzt. Dann existiert ein amples Geradenbündel auf X mit zwei submaximalen Kurven.*

Theorem 3.1.3 und die vorherige Proposition deuten die folgende Vermutung an:

Vermutung 3.1.32. *Jedes ample \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X hat höchstens eine submaximale Kurve genau dann, wenn der Endomorphismenring entweder von der Form*

- $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e ist, oder
- $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$ ist, wobei e zusätzlich einen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$ besitzt.

Bemerkung 3.1.33. Mit Hilfe von zahlentheoretischen Aussagen über quadratische Reste und binäre quadratische Formen (siehe z.B. [14, Prop. 2.2.4] und [15, Lemma 2.5]) kann die folgende Äquivalenz für eine nicht quadratische natürliche Zahl e mit $e \equiv 1 \pmod{4}$ gezeigt werden:

- (i) e besitzt keinen Primfaktor p mit $p \equiv 5$ oder $p \equiv 7 \pmod{8}$,
- (ii) -2 ist ein quadratischer Rest modulo e ,
- (iii) $e = A^2 + 8B^2$ für gewisse $A, B \in \mathbb{N}$ mit $\text{ggT}(A, 2B) = 1$.

Wir zeigen nun, dass es unendlich viele Fälle gibt, in denen es ample Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven gibt:

Proposition 3.1.34. *Sei $e_n := 1 + 8n^2$. Falls e_n keine Quadratzahl ist, dann besitzt jede prinzipalpolarisierte abelsche Fläche mit $\text{End}^{\text{sym}}(X) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e_n}]$ ein amples Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven.*

Beweis. Wir betrachten die Geradenbündel $L = 2nL_0 + L_\infty$ und $L' = (2n - 1)L_0 + L_\infty$. Die primitive Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - L^2 y^2 = 1$ ist gegeben durch $(2n + 1, 1)$, und die Lösung von $x^2 - L'^2 y^2 = 1$ ist $(2n - 1, 1)$. Die Submaximalitäts-Gebiete von $\pi_{\frac{1}{2n}}$ und $\pi_{\frac{1}{2n-1}}$ sind

$$\text{SG}(\pi_{\frac{1}{2n}}) = \left(\frac{16n^3 + (2n + 1)(1 - \sqrt{8n^2 + 1})}{8n^2(4n^2 + 1)}, \frac{16n^3 + (2n + 1)(1 + \sqrt{8n^2 + 1})}{8n^2(4n^2 + 1)} \right)$$

und

$$\text{SG}(\pi_{\frac{1}{2n-1}}) = \left(\frac{2n + (2n - 1)(8n^2 - \sqrt{8n^2 + 1})}{32n^4 - 32n^3 + 16n^2 - 4n + 1}, \frac{2n + (2n - 1)(8n^2 + \sqrt{8n^2 + 1})}{32n^4 - 32n^3 + 16n^2 - 4n + 1} \right).$$

Explizite Berechnungen zeigen, dass beide Pell-Schranken in $\frac{2}{4n-1}$ submaximal sind. Somit schneiden sich die Submaximalitäts-Gebiete und die erste Bedingung von Prop. 3.1.30 ist erfüllt.

Um zu folgern, dass es ein Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven gibt, müssen wir noch zeigen, dass es keine Pell-Schranke π_λ gibt, dessen Submaximalitäts-Gebiet das Intervall $I := \text{SG}(\pi_{\frac{1}{2n}}) \cup \text{SG}(\pi_{\frac{1}{2n-1}})$ enthält. Für diesen Zweck werden wir eine obere und untere Schranke an den Nenner von $\lambda = \frac{p}{q}$ herleiten, welche gleichzeitig erfüllt sein müssen, damit die Pell-Schranke π_λ das Intervall I enthält. Wir werden feststellen, dass diese Schranken sich gegenseitig ausschließen und somit kann es keine solche Pell-Schranke geben.

Obere Schranke für q : Die Pell-Schranke π_λ muss auf dem Intervall

$$I = \left(\frac{16n^3 + (2n + 1)(1 - \sqrt{8n^2 + 1})}{8n^2(4n^2 + 1)}, \frac{2n + (2n - 1)(8n^2 + \sqrt{8n^2 + 1})}{32n^4 - 32n^3 + 16n^2 - 4n + 1} \right)$$

submaximal sein. Es lässt sich zeigen, dass die Länge von I mindestens $(\sqrt{2} + 1)/(4n^2)$ beträgt. Durch Anwendung von Lemma 3.1.17 erhalten wir die obere Schranke

$$q \leq \frac{4n^2 \sqrt{11}}{(\sqrt{2} + 1) \sqrt{8n^2 + 1}} \leq \frac{35}{18} n.$$

Untere Schranke für q : Wir stellen zunächst fest, dass die Seshadri-Kurve $C_0 \in |4L_0|$ nicht submaximal für L und L' ist. Daher können wir im Folgenden ohne Einschränkung $\lambda = \frac{p}{q} > 0$ annehmen. Wir erhalten eine erste vorläufige untere Schranke für q durch die Bedingung, dass L_λ ample sein muss, d. h.

$$L_\lambda^2 = 2 + \frac{2p}{q} - \frac{4n^2 p^2}{q^2} > 0,$$

und folglich erhalten wir

$$q \geq \frac{p}{2} (\sqrt{8n^2 + 1} - 1) \geq \sqrt{2} (n - 1).$$

Leider liefert uns diese untere Schranke noch keinen Widerspruch mit der oberen Schranke. Allerdings können wir mit folgender Methode die untere Schranke weiter verbessern: Unter Verwendung der Abschätzung aus dem Beweis von Lemma 3.1.17 erhalten wir eine maximal mögliche Länge, welche das Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(\pi_\lambda) = (t_1, t_2)$ unter der zusätzlichen Bedingung $\sqrt{2}(n-1) \leq q \leq \frac{35}{18}n$ haben kann:

$$t_2 - t_1 < \frac{2\sqrt{2 + \frac{2}{e_n-1} + \frac{1}{k^2q^2}}}{q\sqrt{e_n}} \leq \frac{2\sqrt{2 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2(n-1)^2}}}{\sqrt{2}(n-1)\sqrt{1+8n^2}} < \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2(n-1)^2}}}{2n(n-1)}.$$

Dies liefert uns wiederum eine obere Schranke für λ , da das Submaximalitäts-Gebiet höchstens die Länge $t_2 - t_1$ besitzt, d. h.

$$\lambda \leq \frac{16n^3 + 2n + 1 - (2n+1)\sqrt{8n^2+1}}{8n^2(4n^2+1)} + \frac{\sqrt{2 + \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{2(n-1)^2}}}{2n(n-1)}.$$

Dies lässt sich weiter abschätzen, so dass wir schließlich $\lambda \leq \frac{1}{2n-3}$ erhalten. Also beträgt der Nenner q von λ mindestens $2n-3$.

Dies zeigt, dass für $n \geq 55$ es keine Pell-Schranke π_λ gibt, dessen Submaximalitäts-Gebiet das Intervall I enthält. Die expliziten Berechnungen von Prop. 3.1.31 decken die übrigen Fälle $n \leq 54$ ab. \square

Bemerkung 3.1.35. Der Fall, in dem e_n eine Quadratzahl ist, d. h. $e_n = 1 + 8n^2 = r^2$ für $r \in \mathbb{N}$ gilt, ist äquivalent dazu, dass (r, n) eine Lösung der Pellschen-Gleichung $x^2 - 8y^2 = 1$ ist. Insbesondere gibt es somit unendlich viele n , so dass e_n keine Quadratzahl ist.

3.2. Beliebige einfache abelsche Fläche mit $\rho=2$

Es stellt sich die naheliegende Frage, wie sich die Seshadri-Funktion im nicht prinzipal-polarisierten Fall verhält. Auch wenn diese Flächen isogen zu einer prinzipal-polarisierten Fläche sind, so ist es nicht möglich über diese Isogenie die Seshadri-Konstanten zu berechnen. Dieser Ansatz scheitert schon im Fall $\rho = 1$ (siehe Kor. 2.2.2). Ausgangspunkt für die vorherige Betrachtung war der Isomorphismus

$$\varphi : \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X) \xrightarrow{\sim} \text{End}_{\mathbb{Q}}^{\text{sym}}(X),$$

welcher im prinzipal-polarisierten Fall einen Isomorphismus zwischen den zugrunde liegenden Gruppen liefert. Der Vorteil dieses Zugangs ist, dass wir sowohl eine explizite Basis für die Néron-Severi-Gruppe als auch die Schnittmatrix der Basis erhalten. Leider liefert dieser Ansatz im nicht-prinzipal-polarisierten Fall keine explizite Basis der Néron-Severi-Gruppe. Wir haben aber in Thm. 2.2.4 gesehen, dass die Seshadri-Funktion nur von der Schnittmatrix und der Lage des Nef-Kegels abhängt. Wir werden nun wie in den Abschnitten 3.1.1 bis 3.1.7 argumentieren, wobei wir von einer *beliebigen* Schnittmatrix S ausgehen werden. Die Schnittmatrix S können wir als binäre quadratische Form auffassen und mit Hilfe von Ergebnissen über quadratische Formen in eine Normalform überführen.

Es zeigt sich, dass wir eine Wahl der Basis von $\text{NS}(X)$ treffen können, so dass wir die Argumente der vorherigen Abschnitte im Wesentlichen übernehmen können. Anstelle des Ausdrucks „ \sqrt{e} “ erhalten wir „ $\sqrt{\Delta(X)}$ “, wobei $\Delta(X) := -\det(S)$ die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe ist.

Wir werden dabei auf die Beweise verzichten, die sich nur geringfügig verändern.

Basis der Néron-Severi-Gruppe und der Nef-Kegel

Wir beginnen damit, dass wir eine geeignete Basis für die Néron-Severi-Gruppe herleiten, um die Schnittmatrix in eine gewünschte Normalform zu bringen.

Lemma 3.2.1. *Sei X eine einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$. Dann gibt es eine Basis (L_0, L_∞) der Néron-Severi-Gruppe, so dass L_0 ample ist und die Basis eine Schnittmatrix der Form*

$$S = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & -2C \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$$

mit $0 < A, C$ und $0 \leq B \leq A, C$ besitzt. Außerdem ist $\Delta(X)$ keine Quadratzahl.

Beweis. Sei (B_1, B_2) eine beliebige Basis von $\text{NS}(X)$ und S' bezeichne deren Schnittmatrix. Es folgt aus dem Hodge-Index-Satz, dass die Matrix S' indefinit ist und eine negative Determinante besitzt. Zudem gibt es per Definition von einfachen abelschen Flächen keine elliptischen Kurven auf X . Also gibt es nach Prop. 1.2.10 keine Geradenbündel mit Selbstschnitt 0. Folglich können wir S' als nicht degenerierte indefinite quadratische Form auffassen. Nach Prop. 1.3.4 ist S' äquivalent zu einer quadratischen Form $Q = [A', B', C']$ mit $0 < A', C'$ und $0 \leq B' \leq A', C'$. Da die Schnittmatrix ganzzahlig ist und Selbstschnitt von Geradenbündeln gerade sind, besitzt Q die Matrixdarstellung

$$Q_M = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & -2C \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$$

mit $0 < A, C$ und $0 \leq B \leq A, C$. Wir können ohne Einschränkung L_0 als ample voraussetzen, da entweder L_0 oder $-L_0$ ample ist. \square

Unklar ist, ob es zu *jeder* Matrix S der obigen Form tatsächlich auch eine abelsche Fläche X mit dieser Schnittmatrix gibt. Im Folgenden sei X stets eine beliebige einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$ und (L_0, L_∞) eine Basis der Néron-Severi-Gruppe wie in Lemma 3.2.1.

Lemma 3.2.2. *Sei L ein Geradenbündel auf X , dessen numerische Klasse gegeben ist durch $L \equiv aL_0 + bL_\infty$ für $a, b \in \mathbb{Z}$. Dann ist L genau dann ample, wenn gilt*

$$a > 0 \quad \text{und} \quad L^2 = 2Aa^2 + 2Bab - 2Cb^2 > 0.$$

Die Nef-Kegel haben eine ähnliche Gestalt wie zuvor (siehe Abb. 3.1 und 3.2) und somit erhalten wir durch $L_t := L_0 + tL_\infty$ einen kompakten Querschnitt. Es genügt daher die Seshadri-Funktion auf diesem Querschnitt zu betrachten, d. h.

$$\varepsilon : \mathcal{N}(X) := \left[\frac{B - \sqrt{\Delta(X)}}{2C}, \frac{B + \sqrt{\Delta(X)}}{2C} \right] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto \varepsilon(L_t).$$

Anzahl der submaximalen Kurven und Struktur der Seshadri-Funktion

Wir zeigen, dass die Seshadri-Funktion im nicht prinzipalpolarisierten Fall sich sehr ähnlich zu dem bereits besprochenen Fall verhält. Mit Satz 2.2.10 folgt, dass jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt, falls $B \equiv 0 \pmod{2}$ gilt. Um zu entscheiden, ob die Seshadri-Funktion in diesem Fall gebrochen linear ist, betrachten wir die Submaximalitäts-Gebiete der Pell-Schranken:

Lemma 3.2.3. *Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$, und sei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$. Dann ist das Submaximalitäts-Gebiet von $\pi_{p/q}$ gegeben durch*

$$\text{SG}(\pi_{p/q}) = \left(\frac{B + \Delta(X)k^2pq - \ell\sqrt{\Delta(X)}}{\Delta(X)k^2q^2 + 2C}, \frac{B + \Delta(X)k^2pq + \ell\sqrt{\Delta(X)}}{\Delta(X)k^2q^2 + 2C} \right).$$

Wegen $\Delta(X) = k^2e$ für eine quadratfreie Zahl $e > 1$ folgt wie in Prop. 3.1.10, dass die Submaximalitäts-Gebiete $\text{SG}(C_1)$ und $\text{SG}(C_2)$ für submaximale Kurven C_1 und C_2 niemals aneinandergrenzen.

Theorem 3.2.4. *Sei X eine einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$, so dass jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt (z.B. falls $B \equiv 0 \pmod{2}$ gilt). Dann ist die Seshadri-Funktion zerbrochen linear.*

Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten und -Kurven

Das essentielle Argument für den vorherigen Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten war, dass wir die Länge der Submaximalitäts-Gebiete hinreichend gut abschätzen konnten. Damit folgte, dass auf einem vorgegebenen Intervall nur endlich viele Pell-Schranken submaximal sein können und wir diese endliche Menge sogar explizit angeben können. Dies ist auch in diesem Fall möglich, da wir die Schnittmatrix so gewählt haben, dass der Eintrag $-2C$ stets negativ bzw. C positiv ist und wir somit die Intervalllänge in Lemma 3.2.4 gut abschätzen können:

Lemma 3.2.5. *Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Dann ist die Länge des Submaximalitäts-Gebiets $\text{SG}(\pi_{p/q}) = (t_1, t_2)$ beschränkt durch*

$$t_2 - t_1 < \frac{2}{q}.$$

Beweis. Sei (ℓ, k) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$. Die explizite Darstellung der Intervalle in Lemma 3.2.3 erlaubt es die Länge zu berechnen und abzuschätzen:

$$t_2 - t_1 = \frac{2\frac{\ell}{kq}\sqrt{\Delta(X)}}{\Delta(X)kq + \frac{2C}{kq}} < \frac{2\sqrt{L_{p/q} + \frac{1}{k^2q^2}}}{q\sqrt{\Delta(X)}} < \frac{2\sqrt{\frac{\Delta(X)}{2C} + 1}}{q\sqrt{\Delta(X)}} < \frac{2}{q}.$$

□

Somit können wir wie in Kor. 3.1.19 folgern, dass es für jedes Intervall $I \subset \mathcal{N}(X)$ nur endlich viele Pell-Schranken gibt, deren Submaximalitäts-Gebiet das Intervall I enthält. Zusätzlich können wir die Pell-Schranken explizit angeben. Daher können wir analog zu Satz 3.1.20 die Seshadri-Konstanten bestimmen.

Theorem 3.2.6. *Sei L ein ampler \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X , dann gibt es einen effektiven Algorithmus, der die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Kurven von L bestimmt.*

Der Algorithmus 3.1.23 kann dabei vollständig übernommen werden.

Fundamental-Kegel und Beispiele für Seshadri-Funktionen

Wir werden sehen, dass die Gruppe $G \subset \text{Aut}(\text{NS}(X))$ der Isometrien, welche die Seshadri-Funktion invariant lassen, auch in diesem Fall unendlich ist und G eine Zerlegung des Ample-Kegels induziert. Die Bedingungen (I)–(IV) in Abschnitt 3.1.5 an die Matrixdarstellung M eines Automorphismus $\phi \in \text{Aut}(\text{NS}(X))$ sind äquivalent zu der Fragestellung, unter welchen Automorphismen $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $M_{1,1} > 0$ die Schnittmatrix S mit $M^T S M$ übereinstimmt. Da die Automorphismen von quadratischen Formen bekannt sind und genau zu den Lösungen einer Pellischen-Gleichung korrespondieren, können wir die Automorphismen mit [12, Thm. 2.5.5] explizit angeben:

Proposition 3.2.7. *Sei $d := \text{ggT}(A, B, C)$ und (α_0, β_0) die primitive Lösung der Pellischen-Gleichung $x^2 - \frac{B^2+4AC}{d^2}y^2 = 4$. Falls $B = 0$ oder $B = A$ ist, dann wird G von*

$$\psi_0 := \begin{pmatrix} \frac{d\alpha_0 - B\beta_0}{2d} & \frac{C}{d}\beta_0 \\ \frac{A}{d}\beta_0 & \frac{d\alpha_0 + B\beta_0}{2d} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau := \begin{pmatrix} 1 & \frac{B}{A} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Andernfalls wird G nur von ψ_0 erzeugt.

Bemerkung 3.2.8. In dem Fall, dass der Automorphismus τ existiert, wird die zu S gehörige quadratische Form *ambig* genannt [12, Def. 1.4.3]. Eine binäre quadratische Form $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ heißt *ambig*, falls es einen Automorphismus $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt, so dass für $Q \circ M(x, y) = a'x^2 + b'xy + c'y^2$ gilt: a' teilt b' . Es gelten folgende Äquivalenzen [25, Exercise 6.21]:

- (i) Q ist ambig.
- (ii) Es gibt eine Matrix $M \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, so dass $Q \circ M(x, y) = ax^2 - bxy + cy^2$ gilt.
- (iii) Es gibt eine Matrix $M \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $\det(M) = -1$, so dass $Q \circ M = Q$ gilt.

Die Konstruktion der Zerlegung des Ample-Kegels läuft analog wie im prinzipalpolarisierten Fall: Wir definieren für $k \in \mathbb{Z}$ die Unterkegel $\mathcal{D}_k \subset \text{Amp}(X)$, welche von den Geradenbündeln $L_k = \psi_0^k(L_0)$ und L_{k+1} erzeugt werden. Im Fall $0 < B < A$ lässt sich die Zerlegung nicht weiter verfeinern und wir erhalten das Fundamental-Intervall $[0, \frac{2A\beta_0}{d\alpha_0 - B\beta_0}]$. Falls $B = 0$ gilt, so können wir \mathcal{D}_0 durch den Automorphismus $\psi_0 \circ \tau$ weiter verfeinern. Die zwei Unterkegel $\mathcal{D}_{0,1}$ und $\mathcal{D}_{0,2}$ werden jeweils von L_0 und $L' := C\beta_0 L_0 + d(\frac{1}{2}\alpha_0 - 1)L_\infty$ bzw. von L' und L_∞ erzeugt. Wir erhalten auf diese Weise das Fundamental-Intervall $[0, \frac{d\alpha_0 - 2d}{2C\beta_0}] \subset \mathcal{N}(X)$. Im Fall $A = B$ liefert das Bündel $L' = (d\alpha_0 + 2d - A\beta_0)L_0 + 2A\beta_0 L_\infty$ die gewünschte Zerlegung von \mathcal{D}_0 mit dem Fundamental-Intervall $[0, \frac{2A\beta_0}{d\alpha_0 + 2d - A\beta_0}]$.

Daher lässt sich Thm. 3.1.29 verallgemeinern:

Theorem 3.2.9. *Es gibt eine Zerlegung des Ample-Kegels in unendlich viele Unterkegel \mathcal{C}_k mit $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Gruppe G der Isometrien von $\text{NS}(X)$, welche die Seshadri-Funktion invariant lassen, transitiv auf der Menge der Unterkegel wirkt. Insbesondere wird die Seshadri-Funktion bereits durch die Werte auf einem Unterkegel \mathcal{C}_k vollständig bestimmt.*

Zudem lassen sich die Seshadri-Konstanten der Geradenbündel auf den Rändern der Unterkegel leicht bestimmen:

Lemma 3.2.10. *Sei X eine abelsche Fläche mit $\rho = 2$, so dass $A = 0$ oder $B = A$ gilt und jedes Geradenbündel höchstens eine submaximale Kurve besitzt. Weiter seien L_0 und L' primitive Geradenbündel auf dem Rand des Fundamental-Kegels. Dann gilt für $L \in \{L_0, L'\}$ entweder*

- (i) $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$, oder
- (ii) $\sqrt{L^2} \notin \mathbb{Z}$ und L besitzt einen eindeutigen Pell-Divisor C oder $2C$, wobei C die Seshadri-Kurve L ist.

Die Aussage setzt sich via ψ_0 auf alle Geradenbündel $\psi_0^k(L)$ fort.

Beispiele für Graphen von Seshadri-Funktionen:

Abschließend geben wir einige Graphen für die Seshadri-Funktionen an. Die Graphen zeigen, dass die Seshadri-Funktionen ein ähnliches Verhalten wie im prinzipalpolarisierten Fall aufweisen. Wie zuvor gibt die gestrichelte Linie das Fundamental-Intervall an. Es zeigt sich auch hier, dass es \mathbb{Q} -Geradenbündel L mit $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ gibt, in denen sich lineare Segmente der Seshadri-Funktion häufen. Im Fall $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ wird bei ≈ -0.6 ersichtlich, dass es Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven gibt. Interessant ist in diesem Fall auch die Wirkung des Automorphismus ψ_0 . Die Prinzipalpolarisierung $L_1 = L_0 + L_\infty$ wird unter ψ_0^{-1} auf $t = \frac{-7}{9}$ abgebildet und ist somit in dem Bild kaum sichtbar. Analog werden die Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven bei $t \approx -0.6$ sehr nahe an den rechten Rand des Definitionsbereiches abgebildet, so dass es den Anschein hat, als gäbe es auf der rechten Seite keine Geradenbündel mit zwei submaximalen Kurven.

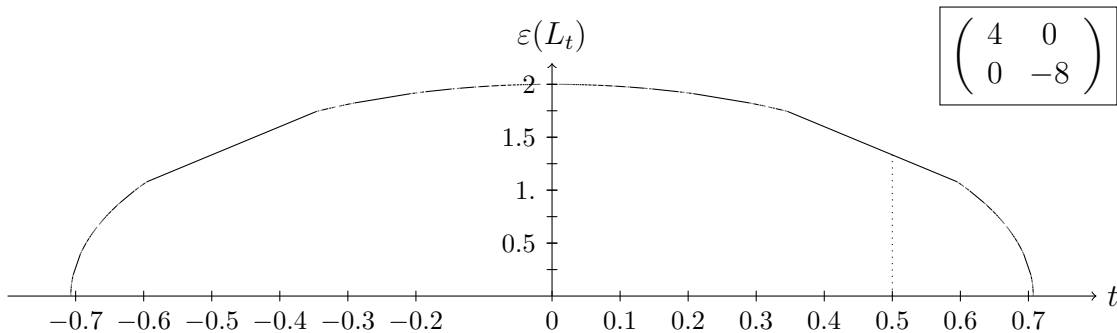


Abb. 3.11: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ besitzt.

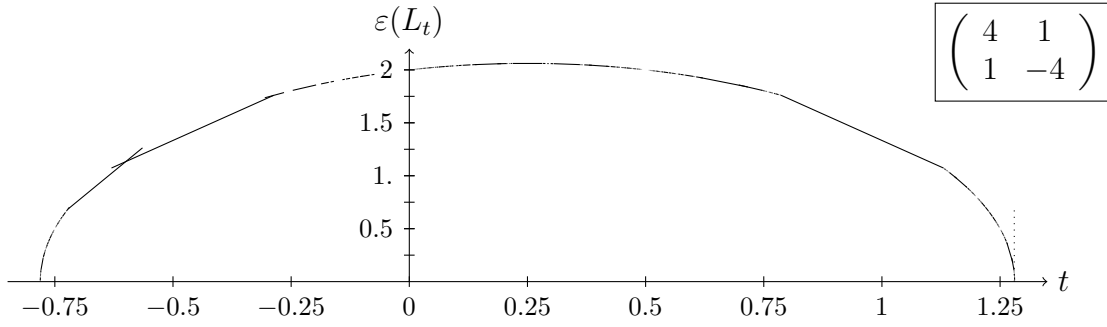


Abb. 3.12: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ besitzt.

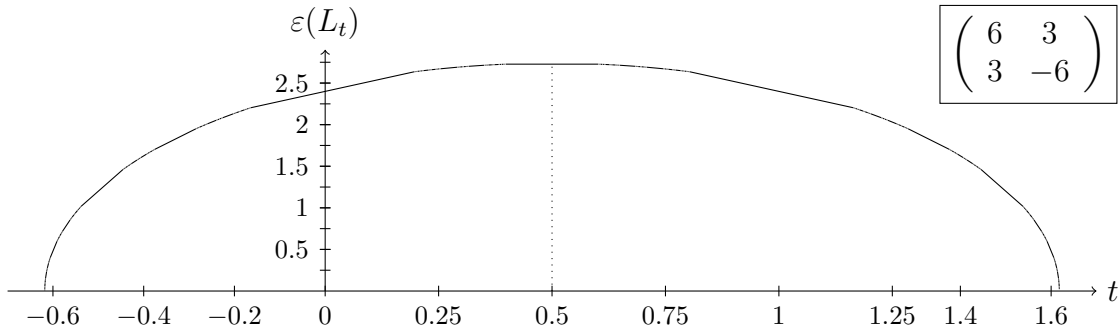


Abb. 3.13: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ besitzt.

Numerisches Kriterium zur Bestimmung der maximalen Anzahl von submaximalen Kurven

Die numerische Methode zur Suche eines Geradenbündels mit zwei submaximalen Kurven aus Abschnitt 3.1.7 kann vollständig übernommen werden.

3.3. Nicht-einfache abelsche Flächen mit $\rho=2$

Die im Abschnitt 3.2 verallgemeinerten Methoden lassen sich auch auf nicht-einfache abelschen Flächen mit $\rho = 2$ anwenden. Wie zuvor wird es essentiell sein, dass wir eine geeignete Basis für die Néron-Severi-Gruppe wählen, so dass wir Kontrolle über die Einträge der Schnittmatrix S und die Lage des Nef-Kegels haben. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass wir bei der Bestimmung der Seshadri-Konstanten elliptische Kurven berücksichtigen müssen. Da elliptische Kurven primitiven ganzzahligen Geradenbündeln auf dem Rand des Nef-Kegels entsprechen, gibt es auf einer nicht-einfachen abelschen Fläche mit $\rho = 2$ nur zwei numerische Klassen von elliptischen Kurven. Folglich müssen wir bei der Berechnung von Seshadri-Konstanten abgesehen von den Pell-Schranken noch zwei weitere elliptische Klassen berücksichtigen, welche wir explizit bestimmen können. Für die amplen submaximalen Kurven werden wir ähnlich wie in den vorherigen Abschnitten argumentieren.

Basis der Néron-Severi-Gruppe und der Nef-Kegel

Auf nicht-einfachen abelschen Flächen liegen elliptische Kurven vor, so dass die Schnittmatrizen aufgefasst als quadratische Form Lösungen $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ mit $(a, b)S(a, b)^T = 0$ besitzt. Nach Prop. 1.3.1 ist dies genau dann der Fall, wenn $-\det(S)$ eine Quadratzahl ist. Mit Hilfe der Normalform von degenerierten quadratischen Formen können wir eine Basis von $\text{NS}(X)$ wie folgt wählen:

Lemma 3.3.1. *Sei X eine nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$. Dann gibt es eine Basis (M_1, M_2) mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) *Die Schnittmatrix ist von der Form $S = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 0 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit $B > 0$ und $0 \leq A \leq B - 1$.*
- (ii) *Falls $A = 0$ ist, so entspricht M_1 einer elliptischen Kurve, und falls $A > 0$ ist, so ist M_1 ample.*
- (iii) *Das Geradenbündel M_2 entspricht einer elliptischen Kurve.*

Beweis. Teil (i) ist die Aussage von Prop. 1.3.3. Die Eigenschaften (ii) und (iii) folgen daraus, dass für ein nicht triviales Bündel L mit $L^2 \geq 0$ entweder L oder $-L$ nef ist (siehe Kor. 1.2.9). \square

Bemerkung 3.3.2. Falls $A > 0$ ist, so können wir eine Basis (L_0, L_∞) wie in Lemma 3.2.1 konstruieren, so dass $L_t = L_0 + tL_\infty$ einen kompakten Querschnitt des Nef-Kegels liefert. In diesen Fällen können wir für die amplen Kurven wie bei beliebigen einfachen abelschen Flächen argumentieren. Allerdings zeigt eine kurze Rechnung, dass im Fall $A = 0$ keine solche Basis existiert.

Auch hier ist es unklar, ob es zu jeder solchen Matrix S auch eine abelsche Fläche mit entsprechender Schnittmatrix gibt. Im Folgenden sei X stets eine nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$ und (M_1, M_2) eine Basis wie in Lemma 3.3.1.

Wir beginnen damit, dass wir die elliptischen Kurven bestimmen:

Lemma 3.3.3. *Sei E eine elliptische Kurve auf X , dann gilt entweder*

$$E_1 := \frac{B}{\text{ggT}(A, B)} M_1 - \frac{A}{\text{ggT}(A, B)} M_2 \equiv E \quad \text{oder} \quad E_2 := M_2 \equiv E.$$

Insbesondere ist E ein Translat von E_1 oder E_2 .

Beweis. Der Selbstschnitt des Geradenbündels $L = aM_1 + bM_2$ verschwindet genau dann, wenn L ein ganzzahliges Vielfaches von E_1 bzw. E_2 ist. Da diese beiden Geradenbündel primitiv sind, entspricht entweder E_i oder $-E_i$ einer elliptischen Klasse. Um zu entscheiden, welcher der beiden Fälle einer elliptischen Klasse vorliegt, betrachten wir das Schnittprodukt $E_i \cdot H$ für das ample Geradenbündel $H = M_1 + M_2$. Da diese Schnitte positiv sind, sind E_1 und E_2 die beiden elliptischen Klassen. \square

Lemma 3.3.4. *Sei $L \equiv aM_1 + bM_2$ ein Geradenbündel auf X . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

- (i) L ist ample.
- (ii) Es gelten die beiden Ungleichungen

$$L \cdot (M_1 + M_2) = aA + bB + aB > 0 \quad \text{und} \quad L^2 = 2a(aA + bB) > 0.$$

- (iii) Der Schnitt von L mit den elliptischen Kurven E_1 und E_2 ist positiv, d. h.

$$L \cdot E_1 = \frac{aAB + bB^2}{\text{ggT}(A, B)} > 0 \quad \text{und} \quad L \cdot E_2 = aB > 0.$$

Beweis. Nach dem Nakai-Moishezon-Kriterium für Ampleness auf abelschen Varietäten [11, Cor. 4.3.3] ist L genau dann ample, wenn $L^2 > 0$ und $L \cdot H > 0$ für ein amplex Geradenbündel H gilt. Für $H = M_1 + M_2$ erhalten wir die Äquivalenz von (i) und (ii). Die Implikation von (i) \Rightarrow (iii) ist durch das allgemeine Nakai-Moishezon-Kriterium ebenfalls klar. Eine kurze Rechnung zeigt, dass die Ungleichungen in (iii) die Ungleichungen in (ii) implizieren. \square

Wir werden unsere Betrachtungen auf dem Querschnitt

$$L_t := (1 + t)M_1 + (1 - t)M_2$$

durchführen. Aus Lemma 3.3.4 folgt, dass ein Geradenbündel L_t genau dann nef ist, wenn $t \in [-1, \frac{B+A}{B-A}] =: \mathcal{N}(X)$ gilt. Damit können wir den Nef-Kegel in $\text{NS}_{\mathbb{R}}(X)$ bezüglich der Basis (M_1, M_2) bestimmen:

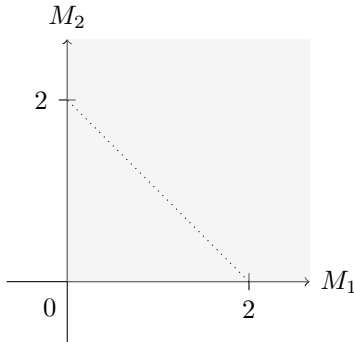


Abb. 3.14: Der Nef-Kegel im Fall $A = 0$.

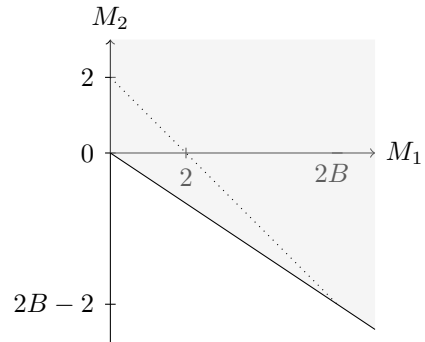


Abb. 3.15: Der Nef-Kegel im Fall $A = B - 1$.

Die gestrichelte Linie gibt den kompakten Querschnitt des Nef-Kegels an. Wir fassen also die Seshadri-Funktion wie folgt auf

$$\varepsilon : \mathcal{N}(X) = \left[-1, \frac{B + A}{B - A} \right] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto \varepsilon(L_t).$$

Wir bestimmen als nächstes die Submaximalitäts-Gebiete der elliptischen Kurven:

Proposition 3.3.5. *Die Submaximalitäts-Gebiete von E_1 und E_2 sind gegeben durch*

$$\text{SG}(E_1) = \left(\frac{B^3 + AB^2 - 2d^2}{B^3 - AB^2 + 2d^2}, \frac{B + A}{B - A} \right) \quad \text{und} \quad \text{SG}(E_2) = \left(-1, \frac{2B + 2A - B^2}{2B - 2A + B^2} \right),$$

wobei $d = \text{ggT}(A, B)$ ist.

Dies ermöglicht uns diejenige Fälle zu bestimmen, in denen für jedes Geradenbündel L eine der elliptischen Kurven (schwach)-submaximal ist. Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{B^3 + AB^2 - 2d^2}{B^3 - AB^2 + 2d^2} \leq \frac{2B + 2A - B^2}{2B - 2A + B^2}$$

gilt. Dies liefert $B^4 \leq 4 \text{ggT}(A, B)^2$ und somit bilden $A = 0$ und $B = 1, 2$ die einzigen Lösungen.

Korollar 3.3.6. *Für $A = 0$ und $B = 1, 2$ wird die Seshadri-Konstante von $L \in \text{Nef}(X)$ durch E_1 oder E_2 berechnet. Insbesondere ist die Seshadri-Funktion stückweise linear.*

Beweis. Nach Prop. 1.1.19 berechnet eine ample submaximale Kurve C ihre eigene Seshadri-Konstante und C ist die einzige (schwach)-submaximale Kurve für $\mathcal{O}_X(C)$. In den Fällen $B \in \{1, 2\}$ und $A = 0$ ist für jedes Geradenbündel $L \in \text{Nef}(X)$ eine der elliptischen Kurven E_1 oder E_2 (schwach)-submaximal. Also kann es keine ample submaximale Kurve geben. \square

Beispiel 3.3.7. Wir können die Seshadri-Funktionen für $A = 0$ und $B \in \{1, 2\}$ explizit angeben, da jede Seshadri-Konstante von E_1 oder E_2 berechnet wird.

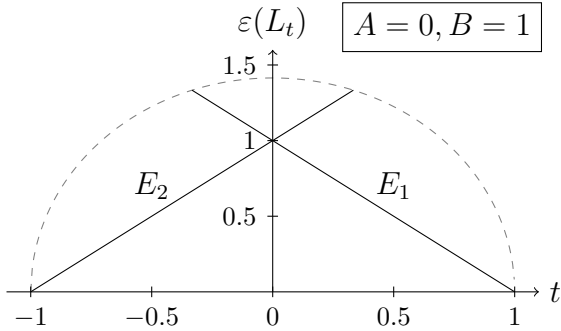


Abb. 3.16: Die Seshadri-Funktion einer nicht-einfachen abelschen Fläche mit $A = 0$ und $B = 1$.

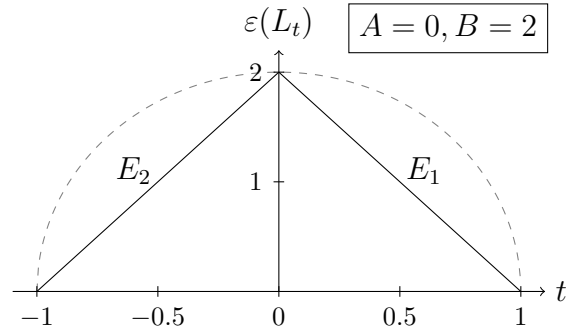


Abb. 3.17: Die Seshadri-Funktion einer nicht-einfachen abelschen Fläche mit $A = 0$ und $B = 2$.

Wir stellen bereits an dieser Stelle fest, dass sich das Verhalten der Seshadri-Funktionen auf nicht-einfachen abelschen Flächen grundlegend von den Seshadri-Funktionen auf einfachen abelschen Flächen unterscheidet. Jedoch werden mit wachsende Zahlen A und B die Bereiche, in denen E_1 und E_2 submaximal sind, immer kleiner. Insbesondere gibt es in allen anderen Fällen auch ample submaximale Kurven, die bei der Berechnung der Seshadri-Funktion beteiligt sind.

Anzahl der submaximalen Kurven und Struktur der Seshadri-Funktion

Wir können mit Satz 2.2.10 folgern, dass für $B \equiv 0 \pmod{2}$ jedes Geradenbündel auf X höchstens eine submaximale Kurve besitzt. Wir haben bereits in Beispiel 3.3.7 gesehen, dass sich die Struktur der Seshadri-Funktion sehr stark von der Struktur auf einfachen abelschen Flächen mit $\rho = 2$ unterscheiden kann. Der Grund dafür ist, dass die Submaximalitäts-Gebiete aneinandergrenzen können. Bevor wir jedoch die Submaximalitäts-Gebiete bestimmen können, müssen wir zunächst die \mathbb{Q} -Geradenbündel $L_{p/q}$ betrachten und das Vielfache $kL_{p/q}$ bestimmen, so dass $kL_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel ist. Wir nehmen an, dass p und q teilerfremd sind, und betrachten $qL_{p/q} = (q+p)M_1 + (q-p)M_2$. Das Geradenbündel $qL_{p/q}$ ist primitiv genau dann, wenn p und q unterschiedliche Paritäten besitzen. Falls p und q ungerade sind, so ist $\frac{q}{2}L_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel. Der Fall, dass p und q gerade sind, kann nicht auftreten, da p und q teilerfremd sind.

Notation 3.3.8. Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Falls $qL_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel ist, so ist die Pell-Schranke von $L_{p/q}$ gegeben durch

$$\pi_{p/q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{L_t \cdot kqL_{p/q}}{\ell} = \frac{2k}{l} (A(1+t)(q+p) + B(q-pt)) ,$$

wobei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$ ist. Falls $\frac{q}{2}L_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel ist, so ist die Pell-Schranke von $L_{p/q}$ gegeben durch

$$\pi_{p/q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{L_t \cdot kqL_{p/q}}{2\ell} = \frac{k}{l} (A(1+t)(q+p) + B(q-pt)) ,$$

wobei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (\frac{q}{2}L_{p/q})^2 y^2 = 1$ ist.

Lemma 3.3.9. Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Falls $qL_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel ist, so ist das Submaximalitäts-Gebiet von $\pi_{p/q}$ gegeben durch

$$\text{SG}(\pi_{p/q}) = \left(\frac{2A + 4B^2k^2pq - 2B\ell}{2B - 2A + 4B^2k^2q^2}, \frac{2A + 4B^2k^2pq + 2B\ell}{2B - 2A + 4B^2k^2q^2} \right) ,$$

wobei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (qL_{p/q})^2 y^2 = 1$ ist. Falls $\frac{q}{2}L_{p/q}$ ein primitives \mathbb{Z} -Geradenbündel ist, so ist das Submaximalitäts-Gebiet von $\pi_{p/q}$ gegeben durch

$$\text{SG}(\pi_{p/q}) = \left(\frac{2A + B^2k^2pq - 2B\ell}{2B - 2A + B^2k^2q^2}, \frac{2A + B^2k^2pq + 2B\ell}{2B - 2A + B^2k^2q^2} \right) ,$$

wobei (ℓ, k) die primitive Lösung von $x^2 - (\frac{q}{2}L_{p/q})^2 y^2 = 1$ ist. Insbesondere sind die Intervallgrenzen in beiden Fällen rationale Zahlen.

Da die Intervallgrenzen rational sind, können wir keine klare Aussage darüber treffen, ob die Intervallgrenzen immer aneinander grenzen oder nicht. Beispiele deuten jedoch an, dass die Intervallgrenzen tatsächlich immer aneinandergrenzen. Dies heißt jedoch nicht, dass die Seshadri-Funktion immer stückweise linear ist, da es sehr wohl auch Häufungspunkte von linearen Stücken gibt (siehe Abb. 3.19). Folglich können wir keine klare Strukturaussage machen.

Algorithmus zur Bestimmung der Seshadri-Konstanten und der Seshadri-Kurven

Auch wenn die genaue Struktur der Seshadri-Funktion verborgen bleibt, können wir die Seshadri-Konstanten und Seshadri-Kurven algorithmisch bestimmen. Grundlage dafür ist, dass wir das Submaximalitäts-Gebiet der Pell-Schranken geeignet abschätzen können:

Lemma 3.3.10. *Sei $L_{p/q}$ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel mit $\sqrt{L_{p/q}^2} \notin \mathbb{Q}$. Dann ist die Länge des Submaximalitäts-Gebiets $\text{SG}(\pi_{p/q}) = (t_1, t_2)$ beschränkt durch*

$$t_2 - t_1 \leq \frac{4\sqrt{L_{p/q}^2 + 4}}{Bkq} \leq \frac{4\sqrt{\frac{2B^2}{B-A} + 4}}{Bq} < \frac{4\sqrt{6}}{q}.$$

Somit können wir wie in Kor. 3.1.19 folgern, dass es für jedes beliebige Intervall I in $\mathcal{N}(X)$ nur endlich viele Pell-Schranken gibt, deren Submaximalitäts-Gebiet das Intervall I enthält. Wir erinnern an folgende Notation: Wir bezeichnen mit I_λ das Intervall, auf dem jede Seshadri-Kurve von L_λ unter der Annahme $\varepsilon(L_\lambda) < \sqrt{L_\lambda^2}$ submaximal ist, und mit s_λ die Länge von I_λ . Damit können wir nun eine Version des Satz 3.1.20 für nicht-einfache abelsche Flächen formulieren:

Satz 3.3.11. *Sei L_λ ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel und sei A_λ die endliche Menge an Pell-Schranken, die auf I_λ submaximal sein können, d. h. $A_\lambda := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathcal{N}(X) \mid 1 \leq b \leq \frac{4\sqrt{6}}{s_\lambda} \right\}$. Dann gilt*

$$\varepsilon(L_\lambda) = \min \left(\left\{ L_\lambda \cdot E_1, L_\lambda \cdot E_2, \sqrt{L_\lambda^2} \right\} \cup \{ \pi_\mu(\lambda) \mid \mu \in A_\lambda \} \right).$$

Gilt außerdem $\varepsilon(L_\lambda) = \pi_\mu(\lambda)$ für ein $\mu \in A_\lambda$, so ist jede ample Seshadri-Kurve C von L_λ durch eine eindeutige Pell-Schranke π_τ repräsentiert mit $\tau \in A_\lambda$ und $\varepsilon(L_\lambda) = \pi_\tau(\lambda)$.

Theorem 3.3.12. *Sei L ein amples \mathbb{Q} -Geradenbündel auf X , dann gibt es einen effektiven Algorithmus, der die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Kurven von L bestimmt.*

Der Algorithmus 3.1.23 kann dabei übernommen werden, wobei die elliptischen Kurven E_1 und E_2 bei der Bildung des Minimums berücksichtigt werden müssen.

Fundamental-Kegel und Beispiele für Seshadri-Funktionen

In dieser Situation zeigt sich, dass die Gruppe $G \subset \text{Aut}(\text{NS}(X))$ der Isometrien, welche die Seshadri-Funktion invariant lässt, endlich ist. Eine Rechnung offenbart, dass ein Automorphismus der Form

$$M_\phi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

die Bedingungen (I)–(IV) in Abschnitt 3.1.5 nur erfüllt, wenn $M_\phi = \text{Id}$ gilt. Es kann also nur Automorphismen $M_\phi \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ mit Determinante -1 geben. Im Bezug auf quadratische Formen ist dies äquivalent dazu, dass S ambig ist (siehe Bem. 3.2.8). Alternativ

lässt sich die Frage auch folgendermaßen verstehen: Welche Automorphismen in $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ bilden die elliptischen Kurven aufeinander ab? Das bedeutet, dass es genau dann einen weiteren Automorphismus gibt, wenn die beiden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{ggT}(A, B)} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ -A \end{pmatrix} \frac{1}{\mathrm{ggT}(A, B)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine ganzzahlige Lösung besitzen. Es folgt, dass der Automorphismus von der Form

$$\frac{1}{\mathrm{ggT}(A, B)} \begin{pmatrix} A & B \\ \frac{\mathrm{ggT}(A, B)^2 - A^2}{B} & -A \end{pmatrix}$$

sein muss. Diese Matrix besitzt ganzzahlige Werte genau dann, wenn gilt:

$$\frac{B}{\mathrm{ggT}(A, B)} \mid 1 - \left(\frac{A}{\mathrm{ggT}(A, B)} \right)^2.$$

Beispiele für Graphen von Seshadri-Funktionen:

Wir haben bereits gesehen, dass die Seshadri-Funktion im Gegensatz zu einfachen abelschen Flächen in einigen Fällen stückweise linear sein kann und somit eine sehr einfache Struktur besitzt. Wir betrachten zunächst einige Beispiele mit $A = 0$. Die folgenden drei Graphiken zeigen die Seshadri-Funktion für $B = 4, 8, 9$. (Die Fälle $B = 1$ und $B = 2$ wurden bereits in Bsp. 3.3.7 betrachtet.) Im Fall $B = 4$ ist die Seshadri-Funktion stückweise linear. Im Fall $B = 8$ liegt ein Häufungspunkt von linearen Segmenten in 0 vor. Außerhalb von 0 scheinen die linearen Stücke stets aneinander anzuschließen.

Im Fall $B = 9$ liegt der Verdacht nahe, dass im Punkt $\frac{1}{3}$ ein Häufungspunkt von linearen Stücken vorliegt, die selbst jedoch nicht immer aneinander anschließen. Somit könnte es in diesem Fall sein, dass dort unendlich viele Häufungspunkte existieren, die sich in $\frac{1}{3}$ häufen. Ebenfalls interessant ist der Punkt $\frac{17}{81} \approx 0.21$, da dieser Punkt möglicherweise ein isolierter Häufungspunkt ist.

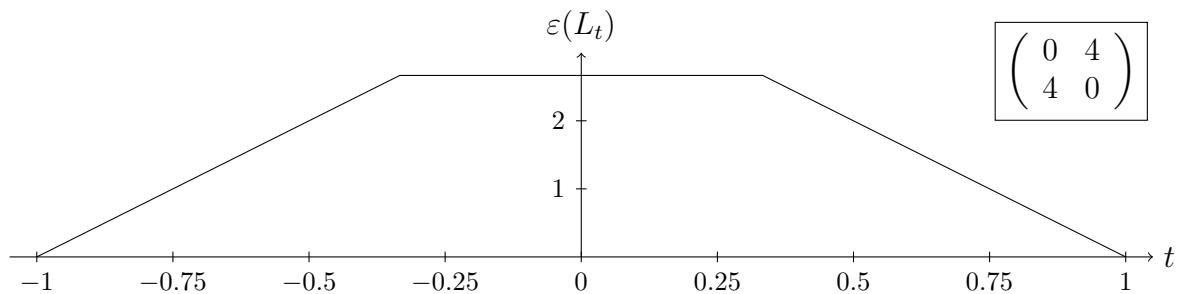


Abb. 3.18: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

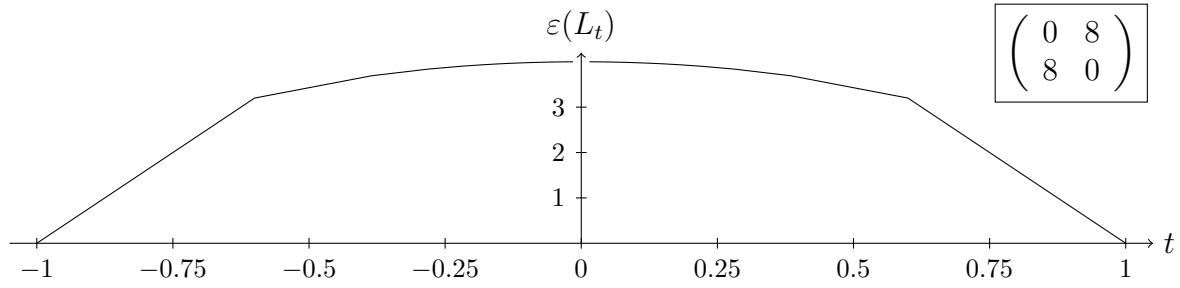


Abb. 3.19: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

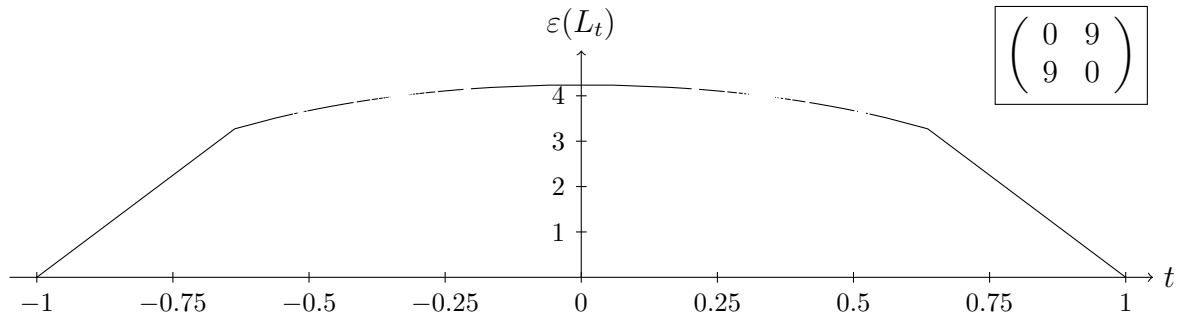


Abb. 3.20: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

Im Fall $A \neq 0$ ist das Häufungsverhalten von linearen Stücken ähnlich wie im Fall $A = 0$. Es gibt Fälle, in denen die Seshadri-Funktion eine stückweise lineare Funktion ist. Ebenso gibt es Fälle, in denen es scheinbar isolierte und nicht isolierte Häufungspunkte von linearen Stücken gibt. Das Beispiel $A = 4$ und $B = 5$ zeigt sehr deutlich, dass in diesem Fall das Geradenbündel bei $t = -0.5$ zwei submaximale Kurven besitzt.

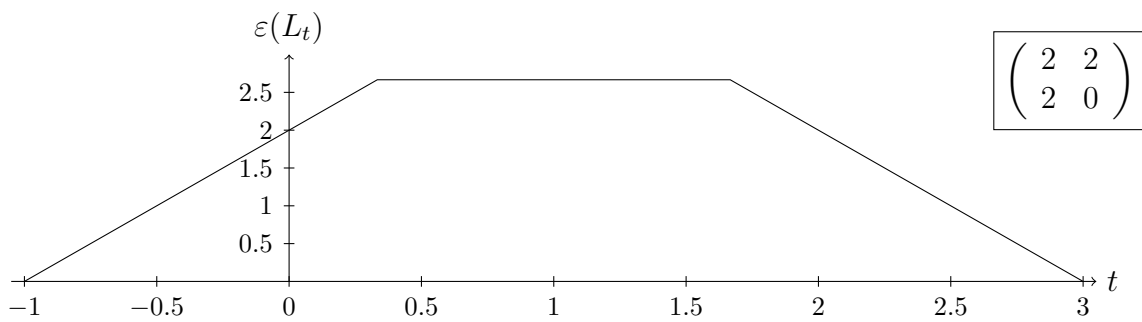


Abb. 3.21: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

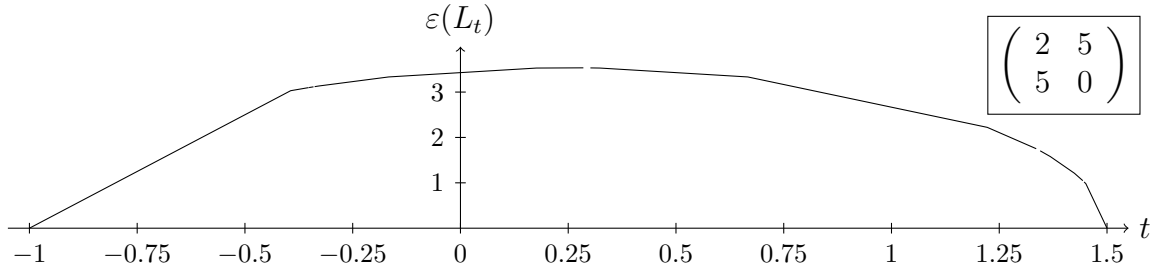


Abb. 3.22: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

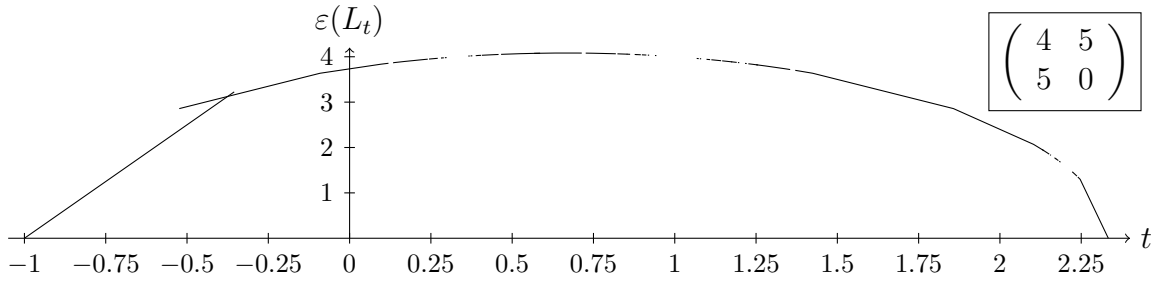


Abb. 3.23: Die Seshadri-Funktion einer abelschen Fläche, falls sie die Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.

Im Fall $A \neq 0$ können wir eine Basis der Néron-Severi-Gruppe wählen, so dass die Schnittmatrix dieser Basis die Form

$$S = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & -2C \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

mit $0 < A, C$ und $0 \leq B \leq A, C$ besitzt. In dieser Situation können wir einen Querschnitt wie bei den einfachen abelschen Flächen definieren, d. h. wir betrachten Geradenbündel auf dem kompakten Querschnitt $\{t \in \mathbb{R} \mid L_0 + tL_\infty\} \cap \mathrm{Nef}(A)$. Diese Querschnitte ermöglichen eine bessere Vergleichbarkeit zu den Seshadri-Funktionen auf einfachen abelschen Flächen. Wir illustrieren nun die Graphen der vorherigen drei Seshadri-Funktionen auf diesem Querschnitt.

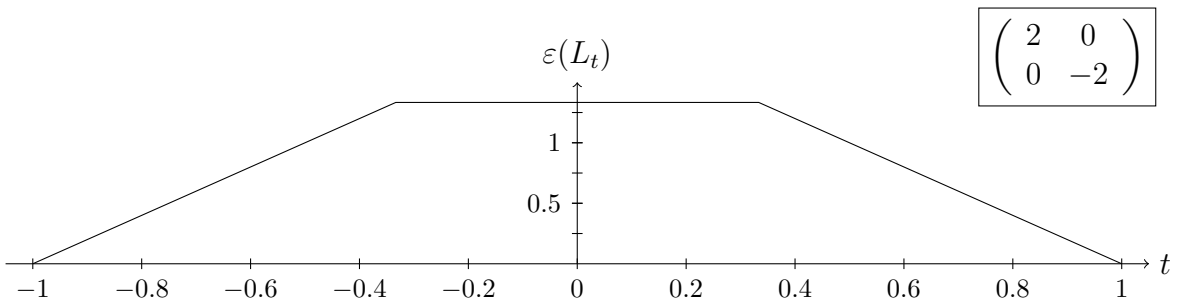


Abb. 3.24: Die Seshadri-Funktion von abelschen Flächen mit Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

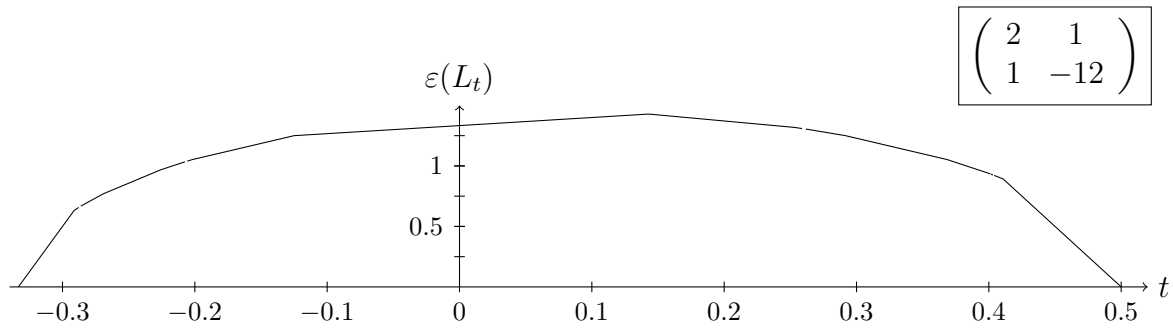


Abb. 3.25: Die Seshadri-Funktion von abelschen Flächen mit Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -12 \end{pmatrix}$.

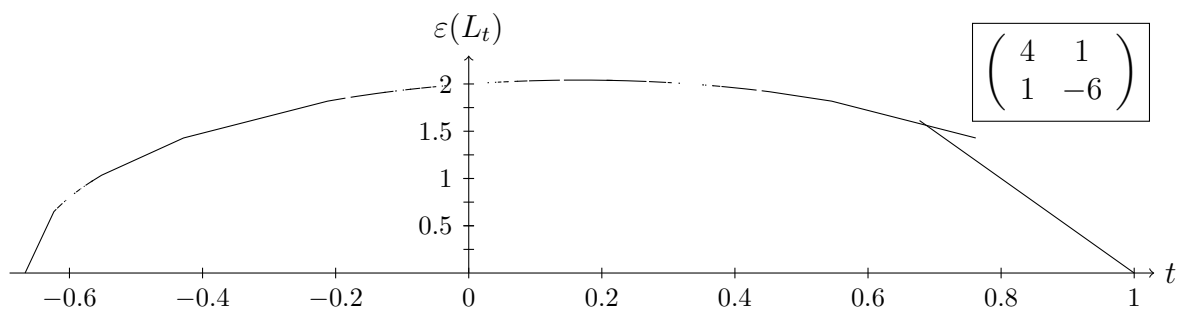


Abb. 3.26: Die Seshadri-Funktion von abelschen Flächen mit Schnittmatrix $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$.

Numerisches Kriterium zur Bestimmung der maximalen Anzahl von submaximalen Kurven

Die numerische Methode zur Suche eines Geradenbündels mit zwei submaximalen Kurven aus Abschnitt 3.1.7 kann unter Berücksichtigung der elliptischen Kurven vollständig übernommen werden.

Kapitel 4

Ganzzahligkeit von Seshadri-Konstanten auf abelschen Flächen

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, auf welchen abelschen Fläche alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. Wir haben in Bem. 2.2.3 gesehen, dass ample submaximale Kurven stets eine nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen. Folglich muss auf einer solchen Fläche die Seshadri-Konstante entweder von einer elliptischen oder von einer amplen schwach-submaximalen Kurve berechnet werden. Wir werden in Thm. 4.1.3 zeigen, dass wir im Fall $\rho \geq 2$ sogar nur die elliptischen Kurven für die Berechnung der Seshadri-Konstante betrachten müssen. Insbesondere gibt es keine einfache abelsche Fläche mit $\rho \geq 2$, auf der alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind, da es dort keine elliptischen Kurven gibt.

Schulz zeigte, dass es Produkte $E \times E$ von elliptischen Kurven E gibt, auf denen jede Seshadri-Konstante von elliptischen Kurven berechnet wird und somit ganzzahlig ist.

Satz 4.0.1 ([7, Thm. 1, 2 und 4.9]). *Sei E eine elliptische Kurve ohne komplexe Multiplikation oder mit komplexer Multiplikation $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})]$. Dann wird jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve $N \subset E \times E$ berechnet.*

In diesem Fall war es sogar möglich eine explizite Formel für die Berechnung der Seshadri-Konstanten anzugeben.

Im Gegensatz dazu können wir nach expliziten Geradenbündeln suchen, die eine nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen. Wir wissen zum Beispiel, dass die Seshadri-Konstante einer irreduziblen Prinzipalpolarisierung $\frac{4}{3}$ beträgt. Die Frage nach der Existenz von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen auf Produkten $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven E_1 und E_2 wurde erstmals von Hayashida und Nishi in [23] untersucht. Kani beantwortete diese Frage in [29] und [30] nahezu vollständig. Kani zeigte, dass es 36 oder 37 Klassen von Produkten $E_1 \times E_2$ gibt, in denen *keine* irreduzible Prinzipalpolarisierung existieren (siehe Thm. 4.3.7 und Thm. 4.4.10 für die genauen Aussagen).

Wir werden zeigen, dass es abgesehen von den von Schulz untersuchten Fällen überraschenderweise nur eine weitere Klasse von Produkten gibt, auf denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind: Wenn E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation sind, so dass der minimale Grad einer Isogenie 2 beträgt, dann wird jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ berechnet. Außerdem wird es uns in diesem Fall möglich sein, dass wir die Seshadri-Konstante algorithmisch berechnen können. Ein Großteil der in diesem Kapitel besprochenen Ergebnisse wurde in [5] und [43] veröffentlicht.

4.1. Kriterium für die Ganzzahligkeit aller Seshadri-Konstanten

Wie bereits in Bem. 2.2.3 angedeutet, können wir mit Theorem 2.2.1 diejenigen abelschen Flächen charakterisieren, welche nur ganzzahlige Seshadri-Konstanten besitzen:

Proposition 4.1.1. *Sei A eine abelsche Fläche. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Es gibt keine submaximale ample Kurve $C \subset A$.*
- (iii) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A gilt $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ oder die Seshadri-Konstante wird von einer elliptischen Kurve berechnet, d. h. es gibt eine elliptische Kurve $E \subset A$ mit*

$$\varepsilon(L) = L \cdot E.$$

Beweis. Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) folgt unmittelbar aus Thm. 2.2.1: Angenommen es gäbe eine submaximale ample Kurve C auf A , dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon(O_A(C)) = \frac{m^2 - 1}{m} \quad \text{oder} \quad \varepsilon(O_A(C)) = \frac{m^2 - 4}{m}.$$

Zusätzlich gilt $m \geq 3$ und $m \not\equiv 0$ modulo 4. Somit ist die Seshadri-Konstante nicht-ganzzahlig. Die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) ergibt sich aus der Tatsache, dass eine Seshadri-Kurve auf einer abelschen Fläche entweder ample oder elliptisch ist. Gilt also $\varepsilon(L) < \sqrt{L^2}$, so wird die Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve berechnet. Während der Fall $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2}$ nur auftreten kann, falls $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ gilt. Die letzte Implikation (iii) \Rightarrow (i) ist offensichtlich, da elliptische Kurven glatt sind. \square

Eine naheliegende Frage ist, ob eine analoge Äquivalenz von (i) \Leftrightarrow (iii) in Prop. 4.1.1 auch für *einzelne* Geradenbündel gilt, das heißt:

Ist die Seshadri-Konstante von L ganzzahlig genau dann, wenn $\varepsilon(L)$ von einer elliptischen Kurve berechnet wird?

In dieser Allgemeinheit kann diese Aussage jedoch nicht gelten: Wenn ein Geradenbündel L eine rationale Seshadri-Konstante besitzt und diese daher nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird, dann liefert ein geeignetes Vielfaches nL eine ganzzahlige Seshadri-Konstante, die jedoch nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Das zeigt außerdem, dass ganzzahlige Seshadri-Konstanten auf natürliche Weise auftreten. Man könnte noch hoffen, dass die Aussage unter der zusätzlichen Annahme gilt, dass L ein primitives Geradenbündel ist. Allerdings zeigt folgendes Lemma, dass diese Aussage auch für primitive Geradenbündel nicht gilt:

Lemma 4.1.2. *Es existiert eine abelsche Fläche A mit $\rho = 2$ und ein primitives amplex Geradenbündel L auf A , so dass die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig ist und nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird.*

Beweis. Sei A eine einfache abelsche Fläche vom Rang 2 mit reeller Multiplikation $\text{End}(A) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$. Dann ist die Schnittmatrix von A bzgl. der Basis (L_0, L_∞) gegeben durch (siehe (3.1)):

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2e \end{pmatrix}.$$

Wir wissen, dass die submaximale Kurve $C_0 \in |4L_0|$ mit $\text{mult}_0 C = 6$ die Seshadri-Konstante für alle \mathbb{Q} -Geradenbündel $L_t = L_0 + tL_\infty$ mit $|t| \leq \frac{1}{3\sqrt{e}}$ berechnet (siehe Abb. 3.1.1). Wir wählen nun $n \in \mathbb{N}$ mit $3^n > 3\sqrt{e}$, dann ist C_0 die Seshadri-Kurve von $L_{1/3^n}$. Somit berechnet C_0 die Seshadri-Konstante des amplen und primitiven Geradenbündels $3^n L_{1/3^n} = 3^n L_0 + L_\infty$, d. h.

$$\varepsilon(3^n L_0 + L_\infty) = \frac{(3^n L_0 + L_\infty) \cdot C_0}{\text{mult}_0 C} = \frac{4 \cdot 3^n}{6} = 2 \cdot 3^{n-1} \in \mathbb{Z}.$$

Offensichtlich kann die Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve berechnet werden, da es keine elliptischen Kurven auf A gibt. \square

Wir werden später auch Beispiele von nicht-einfachen abelschen Flächen mit $\rho = 3$ und $\rho = 4$ angeben, auf denen es Geradenbündel mit ganzzahliger Seshadri-Konstante gibt, die jedoch nicht von einer elliptischen Kurve berechnet werden.

Wir untersuchen als nächstes die Bedingungen in Proposition 4.1.1 (iii). Es zeigt sich, dass wir die zusätzliche Bedingung $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ im Fall $\rho \geq 2$ vernachlässigen können, da es in diesem Fall eine elliptische Kurve E mit $\varepsilon(L) = L \cdot E$ gibt:

Theorem 4.1.3. *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho \geq 2$. Dann gilt folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A wird die Seshadri-Konstante von L von einer elliptischen Kurve berechnet.*
- (iii) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A gibt es eine elliptische Kurve E , welche schwach-submaximal für L ist.*

Beweis. Für die Implikation (i) \Rightarrow (ii) wenden wir Prop. 4.1.1 an. Die Seshadri-Konstante von L wird somit von einer elliptischen Kurve berechnet oder es gilt $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$. Wir wollen zeigen, dass letzteres bereits impliziert, dass die Seshadri-Konstante von L von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Wir nehmen dazu an, es gäbe ein amplies Geradenbündel L mit $\varepsilon(L) = \sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$, so dass die Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Wir werden zeigen, dass ein solches Geradenbündel die Existenz eines amplen Geradenbündel M mit $\sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z}$ impliziert, das keine schwach-submaximale elliptische Kurve besitzt. Also muss die Seshadri-Konstante von M von einer submaximalen amplen Kurve berechnet werden, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Im Fall, dass A eine nicht-einfache abelsche Fläche ist, benötigen wir zunächst einige Vorbereitungen: Sei $\varepsilon_{\text{ell}}(L)$ das Minimum über alle Seshadri-Quotienten von elliptischen Kurven mit L , d.h.

$$\varepsilon_{\text{ell}}(L) = \min \{ L \cdot E \mid E \subset A \text{ elliptische Kurve} \}.$$

Wir wählen eine beliebige ample Basis B'_1, \dots, B'_ρ der Néron-Severi-Gruppe $\text{NS}(A)$, dann ist die Funktion

$$\varepsilon_{\text{ell}} : \text{Nef}(X) \rightarrow \mathbb{R} \quad L' \mapsto \min \{ L' \cdot E \mid E \subset A \text{ elliptische Kurve} \}$$

stetig. Nach Voraussetzung gilt $\sqrt{L^2} < \varepsilon_{\text{ell}}(L)$ und wegen der Stetigkeit von ε_{ell} existiert ein offener Unterkegel $U(L) \subset \text{Amp}(X)$, so dass für alle Geradenbündel $M \in U(L)$ gilt:

$$\varepsilon_{\text{ell}}(M) > \sqrt{M^2}.$$

Wir wählen nun eine neue ample Basis der Néron-Severi-Gruppe, welche aus Elementen von $U(L)$ besteht. Es folgt somit, dass jedes Geradenbündel M in dem von B_1, \dots, B_ρ erzeugten Kegel ample ist und die Eigenschaft besitzt, dass es keine elliptische Kurve gibt, welche schwach-submaximal für M ist. Im Fall, dass A eine einfache abelsche Fläche ist, können wir jede beliebige ample Basis wählen, da es dort keine elliptischen Kurven gibt.

Es bleibt also zu zeigen, dass es in dem von B_1, \dots, B_ρ erzeugten Kegel ein Geradenbündel M mit $\sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z}$ gibt. Wir bezeichnen mit S die Schnittmatrix der Basis B_1, \dots, B_ρ . Dann ist die Frage nach der Existenz eines amplen Geradenbündels mit $\sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z}$ äquivalent dazu, dass ein Vektor $x = (x_1, \dots, x_\rho) \in \mathbb{Z}_{>0}^\rho$ existiert, so dass $x^T S x$ keine Quadratzahl ist. Wir nehmen an, dass die Polynom-Funktion

$$F(X_1, \dots, X_\rho) = (X_1, \dots, X_\rho) S (X_1, \dots, X_\rho)^T \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_\rho]$$

ausgewertet in $x \in \mathbb{N}_0^\rho$ stets eine Quadratzahl ist. Dann folgt allerdings mit [38, Thm. 2], dass $F(X) = G^2(X)$ für ein ganzzahliges Polynom G gilt. Dies hat jedoch zur Folge, dass die Determinante von S verschwindet, was ein Widerspruch zum Hodge-Index-Satz ist.

Die Implikation (ii) \Rightarrow (iii) ist offensichtlich, da jede Seshadri-Kurve auch schwach submaximal ist. Es verbleibt daher die Richtung (iii) \Rightarrow (i). Angenommen, es gäbe ein Geradenbündel, welches eine nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzt. Dann gibt es nach Prop. 4.1.1 eine submaximale ample Kurve C . Dann ist C nach Prop. 1.1.19 die einzige schwach-submaximale Kurve des amplen Geradenbündels $\mathcal{O}_A(C)$. Nach Annahme gibt es jedoch eine schwach-submaximale elliptische Kurve, also einen Widerspruch. \square

Insbesondere folgt somit für einfache abelsche Flächen:

Korollar 4.1.4. *Sei A eine einfache abelsche Fläche. Dann gilt die Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Die Néron-Severi-Gruppe von A besitzt Rang 1 und wird von einem amplen Geradenbündel mit $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ erzeugt.*

Beweis. Für den Fall $\rho = 1$ folgern wir mit dem Resultat von Bauer (siehe Cor. 2.2.2), dass die Seshadri-Konstante genau dann ganzzahlig ist, wenn $\sqrt{L^2} \in \mathbb{Z}$ gilt. Für $\rho \geq 2$ folgt mit Thm. 4.1.3, dass nicht alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sein können. \square

Wir erinnern uns an die Zerlegung der Seshadri-Konstante aus Bem. 2.2.3

$$\varepsilon(L) = \min \left\{ \varepsilon_{\text{amp}}(L), \varepsilon_{\text{ell}}(L), \sqrt{L^2} \right\}.$$

Der Beweis von Thm. 4.1.3 impliziert, dass wir bei der Bildung des Minimums $\sqrt{L^2}$ vernachlässigen können.

Korollar 4.1.5. *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho \geq 2$ und L ein nef Geradenbündel. Dann gilt*

$$\varepsilon(L) = \min \{ \varepsilon_{\text{amp}}(L), \varepsilon_{\text{ell}}(L) \} .$$

Beweis. Falls die Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve bestimmt wird, dann können wir beliebig kleine Kegel um L konstruieren, so dass dort keine elliptische Kurve submaximal ist. Mit dem Argument im Beweis von Thm. 4.1.3 muss es jedoch für jeden solchen Kegel ein Geradenbündel M mit $\sqrt{M^2} \notin \mathbb{Z}$ geben. Diese Geradenbündel konvergieren (nach geeigneter Skalierung) gegen L und erzeugen eine Folge von Pell-Schranken, die in L gegen $\varepsilon(L)$ konvergieren. \square

Nicht einfache abelsche Flächen vom Rang 2

Wir haben bei der Untersuchung der abelschen Flächen vom Rang 2 weitere Beispiele kennengelernt, auf denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind (siehe Beispiel 3.3.7). Es stellt sich heraus, dass diese sogar die einzigen abelschen Flächen vom Rang 2 mit dieser Eigenschaft sind:

Proposition 4.1.6. *Sei A eine nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 2$. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf A ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Es gibt eine Basis der Néron-Severi-Gruppe $\text{NS}(A)$, so dass die Schnittmatrix eine der folgenden Formen besitzt:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweis. Falls die Schnittmatrix von einer der beiden Formen ist, so zeigt Beispiel 3.3.7, dass die Seshadri-Konstante stets von einer elliptischen Kurve berechnet wird und somit ganzzahlig ist.

Für die andere Richtung sei (M_1, M_2) eine Basis wie in Lemma 3.3.1 mit der Schnittmatrix $S = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 0 \end{pmatrix}$. In Proposition 3.3.5 sind die Intervalle I_1 und I_2 gegeben, in denen die elliptischen Kurven für ample Geradenbündel der Form $M_t = (1+t)M_1 + (1-t)M_2$ schwach-submaximal sind. Die Intervalle I_1 und I_2 der elliptischen Kurven zeigen, dass es für die verbleibenden Fälle stets Geradenbündel gibt, so dass keine elliptische Kurve schwach-submaximal ist. Es folgt mit Thm. 4.1.3, dass es nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten geben muss. \square

Es verbleiben somit nicht-einfache abelsche Flächen vom Rang 3 und 4. Wir reduzieren unsere Betrachtungen im Fall $\rho = 3$ auf Produkte $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven, da wir auf diesen die Schnittmatrix kennen und auch die numerischen Klassen der elliptischen Kurven angeben können. Im Fall $\rho = 4$ ist nach [44, Cor. 3.4] jede abelsche Fläche isomorph zu einem Produkt $E_1 \times E_2$.

4.2. Isogenien von elliptischen Kurven

Bevor wir die Flächen $E_1 \times E_2$ betrachten, fassen wir zunächst einige Grundlagen zu Isogenien von elliptischen Kurven zusammen (siehe [24]). Seien $\Lambda_1, \Lambda_2 \subset \mathbb{C}$ Gitter und $E_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1$ sowie $E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_2$ die zugehörigen elliptischen Kurven. Wir können eine Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ über ihre analytische Darstellung als komplexe Zahl $\sigma \in \mathbb{C}$ interpretieren, welche die Eigenschaft $\sigma \cdot \Lambda_1 \subset \Lambda_2$ besitzt. Somit gilt für den Homomorphismenring

$$\text{Hom}(E_1, E_2) \cong \{ \sigma \in \mathbb{C} \mid \sigma \cdot \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \}.$$

Zwei Gitter $\Lambda, \Lambda' \subset \mathbb{C}$ heißen äquivalent, falls es ein $\sigma \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\Lambda' = \sigma \cdot \Lambda$ gilt, und die elliptischen Kurven $E = \mathbb{C}/\Lambda$ und $E' = \mathbb{C}/\Lambda'$ sind genau dann isomorph, wenn ihre Gitter Λ und Λ' äquivalent sind. Folglich können wir unter Verwendung einer beliebigen Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ zu einer isomorphen elliptischen Kurve $E'_1 := \mathbb{C}/(\sigma \cdot \Lambda_1)$ übergehen und erreichen damit, dass Λ_1 ein Untergitter von Λ_2 ist. Dann garantiert uns der Elementarteilersatz die Existenz einer Basis $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{C}$ des Gitters Λ_2 und Zahlen $e_1, e_2 \in \mathbb{N}$ mit $e_1 \mid e_2$, so dass

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} \cdot e_1 \tau_1 + \mathbb{Z} \cdot e_2 \tau_2 \subset \mathbb{Z} \cdot \tau_1 + \mathbb{Z} \cdot \tau_2 = \Lambda_2$$

gilt. Wir gehen dann über zu isomorphen elliptischen Kurven $E'_1 = \mathbb{C}/\Lambda'_1$ und $E'_2 = \mathbb{C}/\Lambda'_2$ mit

$$\Lambda'_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{e_2}{e_1} \cdot \frac{\tau_2}{\tau_1} \right) \quad \text{und} \quad \Lambda'_2 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \cdot \left(\frac{\tau_2}{\tau_1} \right).$$

Wir werden im Folgenden stets davon ausgehen, dass für die Gitter von E_1 und E_2

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}u\tau \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \Lambda_2$$

mit $u \in \mathbb{N}$ und $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt.

Unter dieser Normierung gilt stets, dass die natürliche Quotientenabbildung

$$\mathbb{1} : E_1 \rightarrow E_2, \quad x + \Lambda_1 \mapsto x + \Lambda_2$$

ein Homomorphismus vom Grad $\deg(\mathbb{1}) = u = \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)}$ ist, wobei $a(\Lambda_i)$ die Fläche des Perioden-Parallelogramms von Λ_i ist. Dies zeigt außerdem, dass \mathbb{Z} ein primitives Untergitter von $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ist, da Λ_2 keine Elemente in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ besitzt. Borntreger zeigte in [4, Lemma 3.2, Lemma 3.7], dass wir $\text{Hom}(E_1, E_2)$ in der analytischen Darstellung in $\text{End}(E_1)$ bzw. $\text{End}(E_2)$ sowie Λ_2 einbetten können: Für eine beliebige Isogenie $\alpha : E_2 \rightarrow E_1$ sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Hom}(E_1, E_2) &\rightarrow \text{End}(E_1), & \sigma &\mapsto \alpha \circ \sigma = \alpha \cdot \sigma, \\ \text{Hom}(E_1, E_2) &\rightarrow \text{End}(E_2), & \sigma &\mapsto \sigma \circ \alpha \end{aligned}$$

injektive Homomorphismen. Für ein beliebiges $\lambda \in \Lambda_1 \setminus \{0\}$ liefert die Abbildung

$$\text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \Lambda_2, \quad \sigma \mapsto \sigma(\lambda) = \sigma \cdot \lambda$$

einen injektiven Homomorphismus und durch die Wahl $\lambda = 1$ erhalten wir die natürliche Inklusion $\text{Hom}(E_1, E_2) \subset \Lambda_2$.

Aus diesen Homomorphismen ergeben sich wichtige Konsequenzen: Im Fall $E_1 = E_2$ zeigt dies, dass $\text{End}(E_1)$ eine (multiplikative) Untergruppe von Λ_1 ist, die \mathbb{Z} enthält. Damit lassen sich die Endomorphismenringe von elliptischen Kurven bestimmen:

Proposition 4.2.1 ([24, Prop. 4.7]). *Sei $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ ein Gitter und $E = \mathbb{C}/\Lambda$ die zugehörige elliptische Kurve. Dann gilt:*

- (i) *Falls es ein Polynom $P(t) \in \mathbb{Z}[t]$ vom Grad 2 gibt, so dass $P(\tau) = 0$ ist, dann gilt $\text{End}(E) \supsetneq \mathbb{Z}$ und $\text{End}(E)$ ist ein Untergitter von Λ ,*
- (ii) *oder $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$.*

Wir sagen, dass E im Fall (i) komplexe Multiplikation besitzt. Die Endomorphismenalgebra ist durch $\text{End}_{\mathbb{Q}}(E) = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ für eine quadratfreie Zahl $d > 0$ gegeben. Für den Endomorphismenring gilt somit entweder $\text{End}(E) = \mathbb{Z}$ oder es gibt eine Zahl $f \in \mathbb{N}$ mit $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[f\omega]$, wobei

$$\omega = \begin{cases} \sqrt{-d} & \text{if } d \equiv 1, 2 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-d}) & \text{if } d \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

gilt. Es lässt sich die folgende Struktur von $\text{Hom}(E_1, E_2)$ für den allgemeinen Fall herleiten:

Lemma 4.2.2 ([4, Lemma 3.2, Lemma 3.7]). *Seien $E_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1$ und $E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_2$ isogene elliptische Kurven.*

- (i) *Falls E_1 und E_2 keine komplexe Multiplikation besitzen, d. h. $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z}$, dann gilt $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}\sigma$ für eine Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ von minimalem Grad. (Im Fall $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ gilt $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}$.)*
- (ii) *Falls E_1 und E_2 komplexe Multiplikation besitzen, dann ist $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ein Untergitter von Λ_2 . (Im Fall $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$ gilt $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z} + \sigma\mathbb{Z}$ für ein $\sigma \in \Lambda_2 \setminus \mathbb{Z}$.)*

Abschließend tragen wir noch einige Eigenschaften von Isogenien zusammen, welche wir unter anderem für die Bestimmung von $\text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2)$ sowie der Schnittmatrix der Néron-Severi-Gruppe im Fall von komplexer Multiplikation benötigen. Der Grad $\deg(\sigma)$ einer Isogenie σ ist der Gruppenindex $[\Lambda_2 : \sigma\Lambda_1]$ und die duale Isogenie $\hat{\sigma}$ von σ ist gegeben durch den Homomorphismus

$$\hat{\sigma} : \frac{\deg(\sigma)}{\sigma} : E_2 \rightarrow E_1 \quad x \mapsto \frac{\deg(\sigma)}{\sigma} \cdot x.$$

Durch die Dualisierung erhalten wir auf natürliche Weise einen Gruppenisomorphismus $\text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \text{Hom}(E_2, E_1)$, $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$.

Für $\sigma \in \text{Hom}(E_1, E_2)$ und $\mu \in \text{Hom}(E_2, E_1)$ gelten folgende Eigenschaften:

- $\hat{\sigma} = \frac{a(\Lambda_1)}{a(\Lambda_2)} \bar{\sigma} = u \bar{\sigma}$ und somit $\hat{\hat{\sigma}} = \sigma$ sowie $\widehat{\mu \circ \sigma} = \hat{\sigma} \circ \hat{\mu}$,
- $\deg(\sigma) = \deg(\hat{\sigma}) = \hat{\sigma} \sigma = u |\sigma|^2$ und $\deg(\mu \circ \sigma) = \deg(\mu) \cdot \deg(\sigma)$,
- die Abbildung $\hat{\sigma} \circ \sigma \in \text{End}(E_1)$ bzw. $\sigma \circ \hat{\sigma} \in \text{End}(E_2)$ ist die Multiplikationsabbildung $x \mapsto \deg(\sigma) \cdot x$ auf E_1 bzw. E_2 und besitzt den Grad $\deg(\sigma)^2$,
- und für $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Hom}(E_1, E_2)$ gilt

$$\deg(\sigma_1 + \sigma_2) = \deg(\sigma_1) + \deg(\sigma_2) + (\hat{\sigma}_1 \sigma_2 + \hat{\sigma}_2 \sigma_1),$$

wobei

$$\text{Hom}(E_1, E_2) \times \text{Hom}(E_1, E_2) \rightarrow \mathbb{Z}, \quad (\sigma_1, \sigma_2) \mapsto (\hat{\sigma}_1 \sigma_2 + \hat{\sigma}_2 \sigma_1)$$

eine wohldefinierte additive Funktion ist.

4.3. Produkte $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation

Im Folgenden werden wir die Frage der Ganzzahligkeit aller Seshadri-Konstanten auf Produkten von elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation untersuchen. Um Seshadri-Konstanten und numerische Klassen von elliptischen Kurven auf $E_1 \times E_2$ bestimmen zu können, benötigen wir eine geeignete Darstellung der Néron-Severi-Gruppe.

4.3.1. Néron-Severi-Gruppe im Fall ohne komplexe Multiplikation

Da auf $E_1 \times E_2$ die Prinzipalpolarisierung $L_0 \equiv (E_1 \times \{0\}) + (\{0\} \times E_2)$ existiert, welche durch die Prinzipalpolarisierungen von E_1 und E_2 induziert wird, können wir mit Hilfe des Isomorphismus

$$\varphi_{L_0} : \text{NS}(E_1 \times E_2) \xrightarrow{\sim} \text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2), \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

eine Basis für die Néron-Severi-Gruppe konstruieren. Für diesen Zweck, bestimmen wir zunächst den (symmetrischen) Endomorphismenring von $E_1 \times E_2$. Für den Endomorphismenring von einem Produkt $A \times B$ von abelschen Varietäten gilt

$$\text{End}(A \times B) = \begin{pmatrix} \text{End}(A) & \text{Hom}(B, A) \\ \text{Hom}(A, B) & \text{End}(B) \end{pmatrix}.$$

Der symmetrische Endomorphismenring von $E_1 \times E_2$ bzgl. der Rosati-Involution von L_0 besteht aus den Elementen, welche unter der Rosati-Involution invariant sind. Durch die Wahl von $L_0 = F_1 + F_2$ ist die Rosati-Involution kompatibel mit den zuvor definierten dualen Isogenien von elliptischen Kurven.

Lemma 4.3.1 ([4, Lemma 3.1]). *Sei L_0 die Prinzipalpolarisierung auf $E_1 \times E_2$, welche durch die Prinzipalpolarisierungen auf E_1 und E_2 induziert wird. Dann gilt bezüglich der Rosati-Involution von L_0*

$$\text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{\sigma} \\ \sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sigma \in \text{Hom}(E_1, E_2) \right\}.$$

Da E_1 und somit E_2 keine komplexe Multiplikation besitzen, gilt $\text{End}(E_i) = \mathbb{Z}$ für $i = 1, 2$ sowie $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}\sigma$ für eine Isogenie σ von minimalem Grad. Wir erhalten die Darstellung

$$\text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c\hat{\sigma} \\ c\sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\},$$

und die Elemente

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2)$. Die Urbilder dieser Elemente liefern unter dem Isomorphismus

$$\varphi_{L_0} : \text{NS}(E_1 \times E_2) \xrightarrow{\sim} \text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

die Basis

$$F_1 = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_1), \quad F_2 = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_2), \quad \nabla = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_3)$$

von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$, wobei $L_0 = F_1 + F_2$ gilt.

Die charakteristischen Polynome der Endomorphismen α_1, α_2 und α_3 sind

$$P_{\alpha_1}^a(t) = P_{\alpha_2}^a(t) = t^2 - t \quad \text{und} \quad P_{\alpha_3}^a(t) = t^2 - \deg(\sigma) = t^2 - d.$$

Mit Prop. 1.2.2 ergeben sich die folgenden Schnittzahlen

- $0 = F_1^2 = F_2^2,$
- $-2d = \nabla^2,$
- $1 = L_0 \cdot F_1 = (F_1 + F_2) \cdot F_1 = F_1 \cdot F_2,$
- $0 = L_0 \cdot \nabla = (F_1 + F_2) \cdot \nabla.$

Um die vollständige Schnittmatrix bestimmen zu können, betrachten wir außerdem das Element $\alpha := \alpha_1 + \alpha_3$, welches das charakteristische Polynom $P_\alpha^a(t) = t^2 - t - d$ besitzt. Dies liefert uns zusätzlich die Gleichung

$$-2d = (F_1 + \nabla)^2 = F_1^2 + 2F_1 \cdot \nabla + \nabla^2 = 2F_1 \cdot \nabla - 2d$$

und somit folgt $F_1 \cdot \nabla = 0$ sowie $F_2 \cdot \nabla = 0$. Diese Diskussion liefert uns:

Proposition 4.3.2. *Seien E_1 und E_2 elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation und $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ eine Isogenie mit minimalen Grad d . Dann bilden die Fasern der Projektionen $F_1 = \{0\} \times E_2$ und $F_2 = E_1 \times \{0\}$ zusammen mit dem Element ∇ eine Basis von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$. Die Basis (F_1, F_2, ∇) besitzt die Schnittmatrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2d \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.3.3. *Sei $L \equiv a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla$ ein Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$. Dann ist L ample genau dann, wenn die beiden folgenden Ungleichungen gelten*

$$\begin{aligned} 0 &< a_1, \\ 0 &< 2a_1 a_2 - 2da_3^2 = L^2. \end{aligned}$$

Beweis. Nach dem Nakai-Moishezon Kriterium für abelsche Varietäten (siehe [11, Cor. 4.3.3]) ist das Geradenbündel L genau dann ample, wenn der Schnitt von L mit einem beliebigen amplen Geradenbündel L_0 und der Selbstschnitt $L^2 = 2(a_1 a_2 - da_3^2)$ positiv sind. Wir wählen das ample Geradenbündel $L_0 := \mathcal{O}_{E \times E}(F_1 + F_2)$. Dann gilt $L_0 \cdot L = a_1 + a_2$. Unter der Annahme, dass L^2 positiv ist, folgt, dass a_1 positiv ist genau dann, wenn $a_1 + a_2$ positiv ist. \square

Wir werden später die numerischen Klassen von elliptischen Kurven in der Basis (F_1, F_2, ∇) bestimmen. Aus diesem Grund ist es hilfreich, zusätzlich die folgende Basis bestehend aus elliptischen Kurven zu betrachten, da wir mit dieser Basis die Schnittzahlen von elliptischen Kurven berechnen können.

Proposition 4.3.4. *Seien E_1 und E_2 elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation und $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ eine Isogenie mit minimalen Grad d . Dann bilden die Fasern der Projektionen $F_1 = \{0\} \times E_2$ und $F_2 = E_1 \times \{0\}$ zusammen mit dem Graph Δ der Isogenie σ eine Basis von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$. Die Basis (F_1, F_2, Δ) besitzt die Schnittmatrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d \\ 1 & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $\nabla \equiv \Delta - dF_1 - F_2$.

Beweis. Die drei gegebenen Kurven sind elliptisch (siehe z.B. 4.3.10), daher gilt

$$F_1^2 = F_2^2 = \Delta^2 = 0.$$

Da sich verschiedene elliptische Kurven transversal schneiden, genügt es die Anzahl der Schnittpunkte zu zählen. Somit haben wir

$$F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot \Delta = 1,$$

da sich diese Kurven nur im Ursprung schneiden. Für F_2 und Δ gilt

$$F_2 \cdot \Delta = \#\{(x, 0) \mid x \in E_1\} \cap \{(x, \sigma x) \mid x \in E_1\}.$$

Dies zeigt, dass wir die Anzahl der Lösungen $x \in E_1$ benötigen, welche $\sigma x = 0$ erfüllen. Diese Zahl entspricht aber genau dem Grad der Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$. Wir erhalten daher

$$F_2 \cdot \Delta = \deg \sigma = d.$$

Somit besitzen die Elemente (F_1, F_2, Δ) die obige Schnittmatrix. Da die Determinante der Schnittmatrix mit der Determinante aus Prop. 4.3.2 übereinstimmt, erzeugen F_1 , F_2 und Δ die Néron-Severi-Gruppe. \square

Ein weiterer Vorteil dieser Basis ist, dass wir die Seshadri-Konstante in dem von dieser Basis erzeugten Kegel berechnen können. Dies zeigt außerdem, dass es immer einen offenen Unterkegel gibt, in dem alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind.

Proposition 4.3.5. *Seien E_1 und E_2 elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation und $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ eine Isogenie mit minimalen Grad d . Weiter sei (F_1, F_2, Δ) die Basis von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$ wie in Prop. 4.3.4. Für ein Geradenbündel*

$$L = \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta)$$

mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(L) &= \min \{ L \cdot F_1, L \cdot F_2, L \cdot \Delta \} \\ &= \min \{ a_2 + a_3, a_1 + da_3, a_1 + da_2 \}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei D der Divisor $a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta$ und sei C eine beliebige irreduzible Kurve durch 0, welche keine Komponente von D ist. Da D effektiv ist, können wir die Schnittungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} &= \frac{D \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{\text{mult}_0 D \cdot \text{mult}_0 C}{\text{mult}_0 C} \geq a_1 + a_2 + a_3 \\ &\geq a_2 + a_3 = L \cdot F_1. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ von einer Komponente von D berechnet wird. Die Schnittzahlen von D mit dessen Komponenten ergeben sich aus Prop. 4.3.4. \square

Bemerkung 4.3.6. Indem wir die Rollen von E_1 und E_2 vertauschen, können wir eine weitere Basis der Néron-Severi-Gruppe herleiten. Sei dazu $\hat{\sigma} : E_2 \rightarrow E_1$ die zu σ duale Isogenie und sei $\hat{\Delta}$ der Graph von $\hat{\sigma}$. Mit demselben Argument wie in Prop. 4.3.4 lässt sich zeigen, dass die Elemente $F_1, F_2, \hat{\Delta}$ ebenfalls eine Basis von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$ bilden.

Bezüglich dieser Basis können wir analog zu Prop. 4.3.5 die Seshadri-Konstanten von Geradenbündeln in dem von $(F_1, F_2, \hat{\Delta})$ erzeugten Kegel berechnen. Im Allgemeinen unterscheiden sich die von (F_1, F_2, Δ) und $(F_1, F_2, \hat{\Delta})$ erzeugten Kegel, da es möglich ist, dass wir durch den Basiswechsel negative Koeffizienten erhalten:

$$\hat{\Delta} \equiv (1 - d)F_1 + (d - 1)F_2 + \Delta.$$

Insbesondere zeigt sich, dass die beiden Kegel genau dann übereinstimmen, wenn $d = 1$ ist, d. h. falls E_1 und E_2 isomorph sind.

4.3.2. Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten im Fall ohne komplexe Multiplikation

Wir werden nun in Abhängigkeit des Grades der minimalen Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ untersuchen, auf welchen Produkten von elliptischen Kurven alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. Diese Flächen haben die Eigenschaft, dass alle Seshadri-Konstanten von elliptischen Kurven berechnet werden. Bauer und Schulz zeigten in [7, Thm. 1], dass die Seshadri-Konstanten im Fall $d = 1$ (d. h. auf Produkten $E \times E$) stets von elliptischen Kurven

berechnet werden und daher ganzzahlig sind. Im Gegensatz dazu untersuchte Kani in [30] die Frage, auf welchen Produkten irreduzible Prinzipalpolarisierungen existieren. Die Seshadri-Konstante einer irreduziblen Prinzipalpolarisierung ist $\frac{4}{3}$ (siehe Beispiel 2.4.1) und zeigt, dass es auf der entsprechenden abelschen Fläche nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten gibt. Kani klärt nahezu vollständig, wann eine irreduzible Prinzipalpolarisierung auf einem Produkt $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation existiert:

Theorem 4.3.7 ([30, Thm. 5]). *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven und d der Grad der minimalen Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$. Dann existiert auf $E_1 \times E_2$ eine irreduzible Prinzipalpolarisierung genau dann, wenn $d = 1$ ist oder d eine gerade „Numerus Idoneus“ ist, welche nicht durch 8 teilbar ist. Das ist der Fall für*

$$d \in \{1, 2, 4, 6, 10, 12, 18, 22, 28, 30, 42, 58, 60, 70, 78, 102, 130, 190, 210, 330, 462\}$$

und es existiert höchstens eine weitere solche Zahl $d > 462$ mit $d \equiv 2 \pmod{4}$.

Die Existenz der weiteren unbekannten Zahl $d > 462$ steht in Verbindung mit der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung. Wenn die verallgemeinerte Riemannsche Vermutung wahr ist, dann existiert diese Zahl nicht. Durch computergestützte Berechnungen ist bekannt, dass die Zahl, sofern sie existiert, größer als 10^{11} sein muss. Für weitere Informationen diesbezüglich und Eigenschaften von Numeri Idonei verweisen wir auf die entsprechenden Paper von Kani [28] und [30].

Wir werden nun zeigen, dass es auf $E_1 \times E_2$ im Fall $d \geq 3$ stets nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten gibt. Diese Aussage haben wir in [43, Thm. 3.9] mit Hilfe von quadratischen Formen bewiesen und veröffentlicht. Wir bieten an dieser Stelle einen alternativen kürzeren Beweis für diese Aussage an. Es bleibt dann nur noch der Fall $d = 2$ offen, den wir im nächsten Abschnitt mit Hilfe der elliptischen Kurven auf $E_1 \times E_2$ und quadratischen Formen lösen werden.

Proposition 4.3.8. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation und sei $d \geq 3$ der minimale Grad einer Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$. Dann gibt es auf $E_1 \times E_2$ ein amples Geradenbündel, dessen Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird.*

Beweis. Sei (F_1, F_2, ∇) die Basis aus Prop. 4.3.2, d. h. die Schnittmatrix ist von der Form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2d \end{pmatrix}.$$

Unsere Strategie wird es sein, dass wir ein amples Geradenbündel L in Abhängigkeit von d konstruieren, welches die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) $\sqrt{L^2} < 2d$,
- (ii) $L \cdot M \in 2d \cdot \mathbb{Z}$ für alle Geradenbündel $M \in \text{NS}(E_1 \times E_2)$.

Diese Eigenschaften haben zur Folge, dass es für L keine schwach-submaximalen elliptischen Kurven gibt, da der Schnitt mit jeder elliptischen Kurve mindestens $2d$ ist.

Zunächst konstruieren wir ample Geradenbündel, deren Schnitt mit anderen Geradenbündeln durch $2d$ teilbar ist. Wir betrachten dazu $L_x := 2dF_1 + 2dF_2 + x\nabla$. Der Schnitt mit einem beliebigen Geradenbündel $M = c_1F_1 + c_2F_2 + c_3\nabla$ ist gegeben durch

$$L_x \cdot M = 2dc_1 + 2dc_2 - 2dxc_3.$$

Somit ist der Schnitt $L_x \cdot M$ für alle $x \in \mathbb{Z}$ und alle Geradenbündel M durch $2d$ teilbar.

Im nächsten Schritt, werden wir nun die Bedingungen an x betrachten, so dass L_x ample ist und die Ungleichung $\sqrt{L_x^2} < 2d$ gilt. Diese Bedingungen sind äquivalent zu

$$0 < L_x^2 = 8d^2 - 2dx^2 < 4d^2.$$

Wir suchen also ein $x \in \mathbb{Z}$, so dass

$$2d < x^2 < 4d$$

gilt. Für $d \geq 3$ und $x := \lceil \sqrt{2d+1} \rceil$ sind diese Ungleichungen erfüllt. \square

Das im Beweis konstruierte Geradenbündel zeigt zwar die Existenz einer nicht-ganzzahligen Seshadri-Konstante eines *anderen* Geradenbündels, jedoch kann das angegebene Geradenbündel eine ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen. Die hier verwendete Methode liefert keine Aussage über den Fall $d = 2$, da wir stärkere Bedingungen an das Geradenbündel L stellen als notwendig für die Aussage, dass es keine schwach-submaximale elliptische Kurve gibt. Insofern ist an dieser Stelle noch unklar, ob es im Fall $d = 2$ ein Geradenbündel gibt, das keine schwach-submaximale elliptische Kurve besitzt, oder ob die Seshadri-Konstanten wie im Fall $d = 1$ alle ganzzahlig sind. Wir werden den Fall $d = 2$ im nächsten Abschnitt beantworten.

Wir liefern an dieser Stelle noch ein Beispiel für eine nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 3$, so dass die Seshadri-Konstante von einem primitiven amplen Geradenbündel ganzzahlig ist, diese aber nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird:

Lemma 4.3.9. *Es existiert eine abelsche Fläche A mit $\rho = 3$ und ein primitives Geradenbündel L auf A , so dass die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig ist und nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird.*

Beweis. Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven, so dass der Grad der minimalen Isogenie $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ Grad 3 besitzt. Dann ist die Schnittmatrix von $E_1 \times E_2$ bzgl. der Basis (F_1, F_2, Δ) gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $L_0 := \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(-F_1 + F_2 + \Delta)$ eine irreduzible Prinzipalpolarisierung ist. Offensichtlich gilt $L_0^2 = 2$. Wir müssen also noch ausschließen, dass es eine

elliptische Kurve E mit $L_0 \cdot E = 1$ gibt. Wir betrachten dazu den Schnitt mit einem beliebigen Geradenbündel $M = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta$ und erhalten

$$L_0 \cdot M = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3.$$

Dies zeigt, dass es keine elliptische Kurve E mit $L_0 \cdot E = 1$ geben kann, da der Schnitt mit jedem beliebigen Geradenbündel ein Vielfaches von 2 ist. Die Seshadri-Konstante von L_0 wird somit von einer irreduziblen Kurve $C \in |4L_0|$ mit $\text{mult}_0(C) = 6$ berechnet (siehe Beispiel 2.4.1). Wir betrachten nun den effektiven Divisor

$$\begin{aligned} D &:= 6C + F_1 + F_2 + \Delta \\ &\equiv -23F_1 + 25F_2 + 25\Delta. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\varepsilon(\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D)) = 36$ gilt und die Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Wir haben

$$\frac{\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D) \cdot D}{\text{mult}_0(D)} = \frac{D^2}{\text{mult}_0 D} = \frac{1450}{39} < \sqrt{1450} = \sqrt{\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D)^2},$$

und somit ist D submaximal für $\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D)$. Nach Lemma 1.1.18 ist jede submaximale Kurve eine Komponente von D . Wir berechnen daher die Seshadri-Quotienten von C, F_1, F_2 und Δ und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D) \cdot C}{\text{mult}_0 C} &= 36 < 50 = \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D) \cdot F_1 \\ &< 52 = \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D) \cdot F_2 = \mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D) \cdot \Delta. \end{aligned}$$

Also gilt $\varepsilon(\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(D)) = 36$ und es gibt keine schwach-submaximale elliptische Kurve. \square

4.3.3. Elliptische Kurven auf Produkten von zwei isogenen elliptischen Kurven ohne komplexe Multiplikation

Bisher haben wir gezeigt, dass im Fall $d = 1$ alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind und es im Fall $d \geq 3$ nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten gibt. In diesem Abschnitt werden wir nun zeigen, dass im Fall $d = 2$ jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve berechnet wird und sich somit wie der Fall $d = 1$ verhält. Unser Ziel ist es also zu zeigen, dass jedes ample Geradenbündel eine (schwach)-submaximale elliptische Kurve besitzt.

Um diesen Satz beweisen zu können, benötigen wir die numerischen Klassen der elliptischen Kurven. Für diesen Zweck greifen wir auf eine Darstellung der elliptischen Kurven von Hayashida und Nishi [23] zurück. Diese haben die elliptischen Kurven auf E^n beschrieben und mit demselben Argument folgt:

Lemma 4.3.10 ([23, Lemma 1]). *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven und sei $N \subset E_1 \times E_2$ eine elliptische Kurve. Dann existieren Abbildungen $\sigma_1 \in \text{End}(E_1)$ und $\sigma_2 \in \text{Hom}(E_1, E_2)$, so dass N ein Translat des Bildes der folgenden Abbildung ist*

$$E_1 \rightarrow E_1 \times E_2, \quad x \mapsto (\sigma_1(x), \sigma_2(x)).$$

Wegen $\text{End}(E_1) = \mathbb{Z}$ und $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z}\sigma$ gibt es für jede elliptische Kurve N ganze Zahlen $(a, b) \neq (0, 0)$, so dass N ein Translat von

$$N_{a,b} := \{(ax, b\sigma(x)) \mid x \in E_1\}$$

ist. Für (na, nb) gilt $N_{na,nb} = N_{a,b}$, da die Multiplikationsabbildung $m_n : N_{a,b} \rightarrow N_{a,b}$ surjektiv und vom Grad n^2 ist. Es genügt daher teilerfremde Paare (a, b) zu betrachten.

Als Nächstes wollen wir die numerische Klasse einer elliptischen Kurve $N_{a,b}$ bezüglich der Basis (F_1, F_2, ∇) bestimmen. Dazu müssen wir die Schnitte von $N_{a,b}$ mit den Basiselementen berechnen. In Prop. 4.3.4 haben wir gezeigt, dass $\nabla = \Delta - dF_1 - F_2$ gilt. Wir berechnen daher die Schnitte der elliptischen Kurve $N_{a,b}$ mit den elliptischen Kurven F_1, F_2 und Δ : Da sich $N_{a,b}$ und F_1 für $a \neq 0$ eigentlich schneiden, haben wir

$$N_{a,b} \cdot F_1 = \#(N_{a,b} \cap F_1) = \frac{\#\{(x \in E_1 \mid ax = 0)\}}{\deg(\sigma_{a,b})},$$

wobei $\sigma_{a,b} : E_1 \rightarrow N_{a,b}$ die Abbildung $x \mapsto (ax, b\sigma(x))$ ist. Den Zähler können wir explizit bestimmen, denn die Anzahl der Lösungen $ax \equiv 0$ entspricht dem Grad der Multiplikationsabbildung $m_a : E_1 \rightarrow E_1, x \mapsto ax$, welche den Grad a^2 besitzt. Im Fall $a = 0$ gilt $N_{a,b} = F_1$ und somit $N_{a,b} \cdot F_1 = 0$. Wir können also auch in diesem Fall den Schnitt durch $N_{a,b} \cdot F_1 = \frac{a^2}{\deg(\sigma_{a,b})}$ darstellen. Mit demselben Argument erhalten wir daher die Schnitte

$$N_{a,b} \cdot F_1 = \frac{a^2}{\deg(\sigma_{a,b})}, \quad N_{a,b} \cdot F_2 = \frac{b^2 d}{\deg(\sigma_{a,b})}, \quad N_{a,b} \cdot \Delta = \frac{(b-a)^2 d}{\deg(\sigma_{a,b})},$$

und wegen $\nabla = \Delta - dF_1 - F_2$ gilt

$$N_{a,b} \cdot \nabla = \frac{-2abd}{\deg(\sigma_{a,b})}.$$

Die Koeffizienten der numerischen Darstellung von $N_{a,b}$ bezüglich der Basis (F_1, F_2, ∇) sind gegeben durch

$$\frac{1}{\deg(\sigma_{a,b})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2d \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} a^2 \\ b^2 d \\ -2abd \end{pmatrix} = \frac{(b^2 d, a^2, ab)^T}{\deg(\sigma_{a,b})}.$$

Wir erhalten somit die folgende Darstellung der numerischen Klasse

$$N_{a,b} \equiv \frac{b^2 d}{\deg(\sigma_{a,b})} F_1 + \frac{a^2}{\deg(\sigma_{a,b})} F_2 + \frac{ab}{\deg(\sigma_{a,b})} \nabla.$$

Um die Schnittzahlen vollständig zu verstehen, müssen wir den Grad der Abbildung $\sigma_{a,b}$ bestimmen.

Lemma 4.3.11. *Sei $N \subset E_1 \times E_2$ eine elliptische Kurve und sei $\sigma_{a,b} : E_1 \rightarrow N_{a,b}$ eine Abbildung $x \mapsto (ax, b\sigma(x))$, so dass $\sigma_{a,b}(E_1) = N_{a,b}$ ein Translat von N ist. Dann gilt*

$$\deg(\sigma_{a,b}) = \text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)$$

und die numerische Klasse von N ist gegeben durch

$$N \equiv N_{a,b} \equiv \frac{b^2 d F_1 + a^2 F_2 + ab \nabla}{\text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)}.$$

Beweis. Wir haben bereits gezeigt, dass die numerische Klasse von $N_{a,b}$ gegeben ist durch

$$N_{a,b} \equiv \frac{b^2 d}{\deg(\sigma_{a,b})} F_1 + \frac{a^2}{\deg(\sigma_{a,b})} F_2 + \frac{ab}{\deg(\sigma_{a,b})} \nabla.$$

Es verbleibt also zu zeigen, dass $\deg(\sigma_{a,b}) = \text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)$ gilt.

Da alle Koeffizienten der numerischen Darstellung ganzzahlig sein müssen, folgt, dass $\deg(\sigma_{a,b})$ ein Teiler von $b^2 d$, a^2 und ab ist. Somit ist $\deg(\sigma_{a,b})$ ein Teiler von $\text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)$. Es existiert also eine $\lambda \in \mathbb{N}$ mit

$$\lambda \deg(\sigma_{a,b}) = \text{ggT}(a^2, b^2 d, ab).$$

Falls wir zeigen, dass $\lambda = 1$ gilt, dann folgt die Behauptung. Unter Verwendung der vorherigen Gleichung erhalten wir für die numerische Klasse von $N_{a,b}$

$$N_{a,b} \equiv \lambda \left(\frac{b^2 d}{\text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)} F_1 + \frac{a^2}{\text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)} F_2 + \frac{ab}{\text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)} \nabla \right) \equiv \lambda \bar{N},$$

wobei \bar{N} ein Element der Néron-Severi-Gruppe ist, da alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Als nächstes verwenden wir Prop. 1.2.10 um zu zeigen, dass \bar{N} ein positives Vielfaches einer elliptischen Kurve in $\text{NS}(E_1 \times E_2)$ ist. Da $N_{a,b}$ nach Annahme eine elliptische Kurve ist, können wir Prop. 1.2.10 auf $N_{a,b}$ anwenden und unter Berücksichtigung von $\bar{N} \equiv \frac{1}{\lambda} N_{a,b}$ erhalten wir

$$\bar{N}^2 = \frac{1}{\lambda^2} N_{a,b}^2 = 0$$

sowie

$$\bar{N} \cdot (F_1 + F_2) = \frac{1}{\lambda} N_{a,b} \cdot (F_1 + F_2) > 0.$$

Somit können wir Prop. 1.2.10 auf \bar{N} anwenden. Das heißt, dass es eine elliptische Kurve E und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\bar{N} \equiv mE$ gibt. Wir erhalten also $N_{a,b} \equiv m\lambda E$. Wegen $N_{a,b} \cdot E = \frac{1}{m\lambda} N_{a,b}^2 = 0$ folgt aus Prop 1.2.8, dass E ein Translat von $N_{a,b}$ ist und somit ihre numerischen Klassen übereinstimmen. Da aber m und λ positive Zahlen sind, folgt $m = \lambda = 1$. Also gilt $\deg(\sigma_{a,b}) = \text{ggT}(a^2, b^2 d, ab)$. \square

Es stellt sich die naheliegende Frage, ob es möglich ist, für jedes beliebige Paar (a, b) ein Paar (a', b') zu finden, so dass einerseits die elliptischen Kurven $N_{a,b}$ und $N_{a',b'}$ übereinstimmen und andererseits die Abbildung $\sigma_{a',b'} : E_1 \rightarrow N_{a',b'}$ den Grad 1 besitzt. Im Fall $d = 1$ ist dies möglich, indem wir a und b durch $\text{ggT}(a, b)$ teilen. Allerdings lässt sich für $d > 1$ im Allgemeinen kein solches Paar (a', b') finden, da dies bedeuten würde, dass es für jede elliptische Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ immer eine Abbildung $E_1 \rightarrow N$ vom Grad 1 gibt. Insbesondere würde dies implizieren, dass jede elliptische Kurve isomorph zu E_1 ist. Nach Annahme besitzt jede Isogenie von $E_1 \rightarrow E_2 = N_{0,1}$ jedoch mindestens den Grad d .

Wir haben nun die notwendigen Aussagen, um die Schnittzahlen von elliptischen Kurven mit Geradenbündeln auszurechnen:

Proposition 4.3.12. *Sei L ein Geradenbündel mit $L \equiv a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla$ und sei $N_{a,b}$ eine elliptische Kurve auf $E_1 \times E_2$. Dann ist die Schnittzahl $L \cdot N_{a,b}$ gegeben durch*

$$L \cdot N_{a,b} = \frac{1}{\text{ggT}(a^2, db^2, ab)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der expliziten Darstellung der numerischen Klasse von $N_{a,b}$ gegeben in Lemma 4.3.11. \square

Bemerkung 4.3.13. Wir bezeichnen die zu $L \equiv a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla \in \text{NS}(X)$ gehörige Matrixdarstellung aus Prop. 4.3.12 mit

$$M_L := \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $L \mapsto M_L$ liefert einen Isomorphismus zwischen den abelschen Gruppen

$$\text{NS}(X) = \{a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Diese Darstellung liefert uns ein neues Kriterium, um zu prüfen, ob ein Geradenbündel L auf $E_1 \times E_2$ ample ist:

Proposition 4.3.14. *Sei $L \equiv a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla$ ein Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$ und M_L die zugehörige Matrixdarstellung. Dann gilt $\det(M_L) = \frac{dL^2}{2}$ und wir haben die folgenden Äquivalenzen:*

- (i) L ist ample.
- (ii) M_L ist positiv-definit.
- (iii) Der Schnitt $L \cdot N$ ist für jede elliptische Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ positiv.

Beweis. Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus Prop. 4.3.3 und Prop. 4.3.12. \square

Dieses Kriterium überträgt sich mittels Isogenien auf alle nicht-einfachen abelschen Flächen mit $\rho = 3$:

Korollar 4.3.15. *Sei A eine nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 3$. Dann ist ein Geradenbündel L auf A genau dann ample, wenn der Schnitt $L \cdot N$ für jede elliptische Kurve $N \subset A$ positiv ist.*

Beweis. Nach dem Nakai-Moishezon-Kriterium ist der Schnitt von L mit allen Kurven positiv, falls L ample ist. Wir nehmen daher an, dass für jede elliptische Kurve $N \subset A$ der Schnitt $L \cdot N > 0$ ist. Jede nicht-einfache abelsche Fläche mit $\rho = 3$ ist isogen zu einem Produkt von elliptischen Kurven $E_1 \times E_2$. Sei also $f : A \rightarrow E_1 \times E_2$ eine beliebige Isogenie und $\hat{f} : E_1 \times E_2 \rightarrow A$ die zugehörige duale Isogenie. Da \hat{f} eine endliche Abbildung ist, ist L genau dann ample, wenn das zurückgezogene Geradenbündel $\hat{f}^*(L)$ ample ist. Das Geradenbündel $\hat{f}^*(L)$ ist nach Prop. 4.3.14 genau dann ample, wenn der Schnitt mit

allen elliptischen Kurven $N \subset E_1 \times E_2$ positiv ist. Wir nehmen an, dass L und daher $\hat{f}^*(L)$ nicht ample sind. Das heißt, dass es eine elliptische Kurve $N \subset E_1 \times E_2$ gibt, so dass $\hat{f}^*L \cdot N \leq 0$ gilt. Wir ziehen N und \hat{f}^*L mit f zurück und erhalten

$$f^*\hat{f}^*L \cdot f^*N = \deg(f^*) \left(\hat{f}^*L \cdot N \right) \leq 0.$$

Da f^*N ein nef Geradenbündel auf A mit $(f^*N)^2 = 0$ ist, existiert nach Prop. 1.2.10 eine elliptische Kurve $E \subset A$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $f^*N \equiv mE$. Wegen $f^*\hat{f}^*L = \deg(f)^2L$ gilt jedoch

$$0 \geq f^*\hat{f}^*L \cdot f^*N = \deg(f)^2 (L \cdot f^*N) = m \deg(f)^2 (L \cdot E)$$

und somit existiert eine elliptische Kurve, deren Schnitt mit L nicht positiv ist. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Voraussetzung und damit sind φ^*L sowie L ample. \square

Die Existenz einer (schwach)-submaximalen elliptischen Kurve lässt sich mit Hilfe der Matrixdarstellung eines Geradenbündels wie folgt ausdrücken:

Proposition 4.3.16. *Sei $L \equiv a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\nabla$ ein amplex Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$. Dann besitzt L eine (schwach)-submaximale elliptische Kurve genau dann, wenn es ein teilerfremdes Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ gibt, welches die folgende Ungleichung erfüllt:*

$$\frac{1}{\text{ggT}(a, d)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \stackrel{(\leq)}{<} \sqrt{\frac{2 \det(M)}{d}}.$$

Beweis. Die gegebene Ungleichung entspricht unter Verwendung von Prop. 4.3.12 der Ungleichung

$$L \cdot N_{a,b} \stackrel{(\leq)}{<} \sqrt{L^2},$$

wobei wir zusätzlich verwenden, dass $\text{ggT}(a^2, b^2d, ab) = \text{ggT}(a, d)$ gilt, wenn a und b teilerfremd sind. \square

Wir haben in Abschnitt 4.3.2 bereits gesehen, dass es für $d \geq 3$ stets nicht-ganzzahlige Seshadri-Konstanten gibt. Mit Hilfe von Proposition 4.3.16 können wir das Kriterium für die Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten in Thm. 4.1.3 wie folgt darstellen:

Korollar 4.3.17. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf $E_1 \times E_2$ ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Für jede positiv-definite Matrix der Form*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

existiert ein teilerfremdes Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\frac{1}{\text{ggT}(a, d)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq \sqrt{\frac{2 \det(M)}{d}}.$$

In Korollar 4.3.17 haben wir die Frage nach der Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten in ein rein numerisches Problem umgeformt. Wir wenden auf die Matrix M die Aussage über positiv-definite binäre quadratische Formen an, dass jede Form äquivalent zu einer reduzierten quadratischen Form ist (siehe Thm. 1.3.6). Wir erhalten damit die folgende Verfeinerung von Kor. 4.3.17:

Lemma 4.3.18. *Es gilt die folgende Äquivalenz:*

(i) *Für jede positiv-definite Matrix der Form*

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$$

existiert ein teilerfremdes Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\frac{1}{\text{ggT}(a, d)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leq \sqrt{\frac{2 \det(M)}{d}}.$$

(ii) *Für jede reduzierte positiv-definite binäre quadratische Form $Q = [A, B, C]$ und jede Matrix $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ existiert ein teilerfremdes Paar $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, so dass die folgende Ungleichung gilt*

$$\frac{Q(a, b)}{\text{ggT}(a\alpha + b\beta, d)} \leq \sqrt{\frac{2 \det(Q)}{d}}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst wie ein Basiswechsel von \mathbb{Z}^2 die entsprechenden Ungleichungen beeinflusst. Sei dazu M eine positiv-definite Matrix und

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$$

ein Basiswechsel. Unter dem Basiswechsel S gilt, dass das Paar (a, b) genau dann teilerfremd ist, wenn das Paar $(x, y) := S^{-1}(a, b)^T$ teilerfremd ist. Für $R := S^T M S$ gilt

$$\frac{1}{\text{ggT}(a, d)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^T M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{ggT}(x\alpha + y\beta, d)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Die Änderung des größten gemeinsamen Teilers durch den Basiswechsel ist somit wie im Lemma gegeben.

Die Implikation (ii) \Rightarrow (i) folgt aus der Tatsache, dass nach Satz 1.3.6 jede positiv-definite Matrix in (i) äquivalent zu einer eindeutigen reduzierten Form ist. Falls es eine Lösung der Ungleichung für alle reduzierten positiv-definiten quadratischen Formen und für alle $S \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt, dann gibt es ebenfalls eine Lösung für alle positiv-definite Formen.

Die Implikation (i) \Rightarrow (ii) ist weniger offensichtlich, da (ii) eine Aussage über alle positiv-definiten Formen ist, während (i) nur eine Aussage über diejenigen positiv-definiten Formen trifft, die von der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix} \quad (*)$$

sind. Sei $Q = [A, B, C]$ eine beliebige reduzierte positiv-definite quadratische Form und $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Zunächst halten wir fest, dass die Ungleichung in (ii) invariant unter Skalierung ist, da

$$\frac{\lambda Q(a, b)}{\mathrm{ggT}(a\alpha + b\beta, d)} \leq \sqrt{\frac{2\lambda^2 \det(Q)}{d}}$$

gilt. Das heißt, dass es genau dann eine Lösung für Q gibt, wenn auch die skalierten Formen $\lambda Q = [\lambda A, \lambda B, \lambda C]$ für alle $\lambda \in \mathbb{N}$ eine Lösung besitzen. Wir wählen nun $\lambda = 2d$ und nach expliziter Berechnung des Basiswechsels erhalten wir die Matrix

$$M = 2d \cdot S^T \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} S,$$

welche von der Form (*) ist. Somit ist die Ungleichung tatsächlich auch für alle reduzierten Formen erfüllt. \square

Bemerkung 4.3.19. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass die Wirkung des Basiswechsels $S \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ angewandt auf M_L im Allgemeinen nicht von einem Automorphismus von $E_1 \times E_2$ oder $\mathrm{NS}(E_1 \times E_2)$ stammt.

Ein Automorphismus $\tau \in \mathrm{Aut}(E_1 \times E_2)$ ist von der Form

$$\tau \in \begin{pmatrix} \mathrm{End}(E_1) & \mathrm{Hom}(E_2, E_1) \\ \mathrm{Hom}(E_1, E_2) & \mathrm{End}(E_2) \end{pmatrix}$$

mit Determinante 1. Sei φ eine Isogenie von minimalem Grad, dann lässt sich τ wegen $\hat{\varphi} = d\varphi$ als ganzzahlige Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & d\beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

auffassen. Allerdings muss ein Basiswechsel S in Lemma 4.3.18 nicht unbedingt diese Form besitzen. Falls dies jedoch der Fall ist, so ist der Automorphismus von $E_1 \times E_2$ und der Basiswechsel S kompatibel.

Um zu zeigen, dass die Wirkung des Basiswechsels S kein Automorphismus der Néron-Severi-Gruppe ist, betrachten wir im Fall $d = 3$ die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die Wirkung von S auf die Basiselemente $F_1 = N_{0,1}$, $F_2 = N_{1,0}$ und $\Delta = N_{1,1}$. Die Bilder $N_{1,2}$, $N_{1,3}$ und $N_{2,5}$ der Basis liefern jedoch keine Basis der Néron-Severi-Gruppe, da die Determinante der Schnittmatrix 54 ist und somit nicht mit der Determinante der Schnittmatrix von (F_1, F_2, Δ) übereinstimmt.

Da die reduzierte Form effektiv berechenbar ist, können wir auch für ample Geradenbündel L die elliptischen Kurven effektiv bestimmen, welche die kleinste Schnitzzahl mit L besitzen:

Satz 4.3.20. *Sei L ein ampler Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$. Dann existiert ein effektiver Algorithmus um die elliptischen Kurven E zu bestimmen mit*

$$L \cdot E = \varepsilon_{\text{ell}}(L) = \min \{ L \cdot N \mid N \subset E_1 \times E_2 \text{ elliptische Kurve} \} .$$

Beweis. Sei M_L die Matrixdarstellung von L . Nach Thm. 1.3.6 existiert ein effektiver Algorithmus, um die reduzierte Form $Q = [A, B, C]$ von M_L sowie den zugehörigen Basiswechsel S mit $M_L = S^T Q S$ zu bestimmen. Da Q eine reduzierte positiv-definite Form ist, gibt es für jede obere Schranke R_Q eine Schranke $R_{x,y}$, so dass für alle $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $Q(x, y) \leq R_Q \cdot d$ bereits $|x|, |y| \leq R_{x,y}$ gilt. Durch die Wahl von $R_Q = A = Q(1, 0)$ ist garantiert, dass es mindestens eine Lösung gibt.

Man beachte, dass es *nicht* genügt die kleinste Lösung $Q(1, 0)$ (siehe Prop. 1.3.7) zu betrachten, da wir in Lemma 4.3.18 den größten gemeinsamen Teiler $1 \leq \text{ggT}(a, d) \leq d$ berücksichtigen müssen. \square

Unabhängig davon, ob alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind, liefert Satz 4.3.20 einen Algorithmus, um zu prüfen, ob ein Geradenbündel eine (schwach)-submaximale elliptische Kurve besitzt. Im Fall der Existenz einer submaximalen elliptischen Kurve liefert der Algorithmus daher eine Umgebung, in der die elliptische Kurve eine verbesserte obere Schranke für die Seshadri-Funktion.

Bauer und Schulz zeigten in [7] bereits, dass im Fall $d = 1$ die Seshadri-Konstanten stets ganzzahlig sind. Mit Hilfe der Darstellung der amplen Geradenbündel als reduzierte positiv-definite quadratische Formen können wir nun auch zeigen, dass die Seshadri-Konstante im Fall $d = 2$ ebenfalls stets ganzzahlig ist:

Theorem 4.3.21. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven ohne komplexe Multiplikation und sei $d = 1$ oder $d = 2$ der minimale Grad der Isogenien $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$. Dann sind alle Seshadri-Konstante auf $E_1 \times E_2$ ganzzahlig.*

Insbesondere wird jede Seshadri-Konstante von einer elliptischen Kurve berechnet und es gibt einen effektiven Algorithmus, um die Seshadri-Konstante und die Seshadri-Kurven zu berechnen.

Beweis. Wir werden zeigen, dass wir Lemma 4.3.18 und somit Kor. 4.3.17 in dieser Situation anwenden können. Zunächst beobachten wir, dass die Ungleichung in Lemma 4.3.18 (ii) nicht von γ und δ abhängt. Es genügt somit teilerfremde Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ zu betrachten. Sei nun $Q = [A, B, C]$ eine beliebige reduzierte positiv-definite Form. Wir müssen zeigen, dass es ein teilerfremdes Paar (a, b) gibt, so dass die folgende Ungleichung erfüllt ist

$$\frac{Q(a, b)}{\text{ggT}(a\alpha + b\beta, d)} \leq \sqrt{\frac{2 \det(Q)}{d}} . \quad (*)$$

Wir betrachten zunächst den Fall $d = 1$. Aus Prop. 1.3.7 (i) folgt, dass für $(1, 0)$ die Ungleichung

$$Q(1, 0) = A \leq \sqrt{\frac{4 \det(Q)}{3}} \leq \sqrt{2 \det(Q)}$$

gilt. Folglich haben wir in diesem Fall bereits eine Lösung gefunden.

Sei nun $d = 2$. Wir behaupten, dass mindestens eines der Paare $(1, 0), (0, 1), (1, \pm 1)$ die Ungleichung $(*)$ erfüllt. Wir betrachten dafür die Fälle in Abhängigkeit der Teilbarkeit von α und β durch 2. Da α und β teilerfremd sind, können nicht beide gleichzeitig durch 2 teilbar sein.

Wir betrachten zuerst den Fall $\alpha \equiv 0$ und $\beta \equiv 1$ modulo 2. Dann gilt für $(a, b) = (1, 0)$

$$\frac{Q(1, 0)}{\text{ggT}(\alpha, 2)} = \frac{A}{2} \leq \sqrt{\frac{\det(Q)}{3}} < \sqrt{\det(Q)},$$

wobei die Abschätzung aus Prop. 1.3.7 folgt. Somit erfüllt $(1, 0)$ die Ungleichung $(*)$.

Als Nächstes behandeln wir den Fall $\alpha \equiv 1$ und $\beta \equiv 0$ modulo 2. Wir nehmen an, dass weder $(1, 0)$ noch $(0, 1)$ die Ungleichung $(*)$ erfüllen, das heißt, es gilt

$$\frac{Q(1, 0)}{\text{ggT}(\alpha, 2)} = A > \sqrt{\det(Q)},$$

und

$$\frac{Q(0, 1)}{\text{ggT}(\beta, 2)} = \frac{C}{2} > \sqrt{\det(Q)}.$$

Nach Multiplikation beider Ungleichungen impliziert dies

$$B^2 > 2AC,$$

was aber unmöglich ist, da Q reduziert ist und somit $|B| \leq A \leq C$ gilt.

Abschließend wenden wir uns dem Fall $\alpha \equiv 1$ und $\beta \equiv 1$ zu. Wir nehmen diesmal an, dass weder $(1, 0)$ noch $(1, \pm 1)$ die Ungleichung $(*)$ erfüllen. Es gilt also

$$\frac{Q(1, 0)}{\text{ggT}(\alpha, 2)} = A > \sqrt{\det(Q)},$$

und

$$\frac{Q(1, \pm 1)}{\text{ggT}(\alpha \pm \beta, 2)} \geq \frac{A + C - |B|}{2} > \sqrt{\det(Q)}.$$

Wie zuvor multiplizieren wir diese beiden Ungleichungen und erhalten

$$2A^2 + B^2 > 2AC + 2A|B|,$$

was unmöglich ist, da Q reduziert ist. □

Bemerkung 4.3.22. In dem Paper [43] haben wir die Aussage, dass es für $d \geq 3$ ample Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$ ohne schwach-submaximale elliptische Kurven gibt, mit Hilfe von Lemma 4.3.18 (ii) gezeigt. Das heißt, wir haben eine reduzierte positiv-definite Form $Q = [A, B, C]$ und eine Matrix $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ konstruiert, so dass für jedes teilerfremde Paar (a, b) die Ungleichung

$$\frac{Q(a, b)}{\text{ggT}(a\alpha + b\beta, d)} > \sqrt{\frac{2\det(Q)}{d}}$$

erfüllt ist. Explizit haben wir gezeigt, dass die quadratische Form $Q = [2, 1, d]$ und die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$$

für jedes teilerfremde Paar (a, b) die Ungleichung

$$\frac{Q(a, b)}{\mathrm{ggT}(a + b\left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil, d)} \geq 2 > \sqrt{\frac{8d-1}{2d}} = \sqrt{\frac{2\det(Q)}{d}} \quad (*)$$

erfüllt. Für weitere Details verweisen wir auf [43, Thm. 3.9].

4.3.4. Klassifikation der Prinzipalpolarisierungen auf $E_1 \times E_2$

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe der Matrixdarstellung von Geradenbündeln die Isomorphieklassen von Prinzipalpolarisierungen charakterisieren. Wir werden ein Kriterium angeben, mit dem wir direkt anhand der reduzierten Form der Matrixdarstellung ablesen können, ob es sich um eine reduzible oder irreduzible Prinzipalpolarisierung handelt. Dieses Ergebnis führt zu einem alternativen Beweis für Thm. 4.3.7 von Kani, welches eine Aussage über die Existenz von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen auf $E_1 \times E_2$ trifft.

Wir wiederholen zunächst die notwendigen Notationen und orientieren uns dabei an Lange (siehe [33]). Zwei Prinzipalpolarisierungen L_1 und L_2 sind *äquivalent*, wenn es einen Automorphismus $\phi \in \mathrm{Aut}(E_1 \times E_2)$ gibt, so dass $\psi^*L_1 \equiv L_2$ gilt. Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen von Prinzipalpolarisierungen auf $E_1 \times E_2$ mit

$$P(X) = \{L \in \mathrm{NS}(X) \mid L \text{ ample}, L^2 = 2\} / \sim.$$

Wir zeigten bereits in Prop. 4.3.14, dass die Determinante der zu L gehörigen Matrix M_L gegeben ist durch $\det(M_L) = \frac{dL^2}{2}$. Somit handelt es sich bei

$$M_L = \begin{pmatrix} a_1 & -da_3 \\ -da_3 & da_2 \end{pmatrix}$$

um eine Prinzipalpolarisierung, falls M_L positiv-definit ist und $\det(M_L) = d$ gilt. Außerdem ist die Matrix M_L einer Prinzipalpolarisierung primitiv (d. h. $\mathrm{ggT}(a_1, da_2, da_3) = 1$), da der Selbstschnitt 2 ist. Somit ist die quadratische Form M_L äquivalent zu einer eindeutig reduzierten Form $Q = [A, 2B, C]$ mit $0 \leq 2B \leq A \leq C$ und $\mathrm{ggT}(A, B, C) = 1$; um die Notation zu vereinfachen, nennen wir eine solche quadratische Form *prinzipal-reduzierte Form mit Determinante d*. (Man beachte, dass die Matrizen M_L stets ganzzahlige Einträge besitzen, somit muss der zweite Eintrag der zugehörigen quadratischen Form Q gerade sein.)

Mit den Argumenten aus [33, Thm. 5.1.] zeigt sich, dass auch die Umkehrung wahr ist. Das heißt, dass für jede prinzipal-reduzierte Form Q eine Prinzipalpolarisierung L existiert, so dass die reduzierte Form von M_L mit Q übereinstimmt. Außerdem zeigt Lange in [33, Chp. 5.], dass zwei Prinzipalpolarisierungen L_1 und L_2 genau dann äquivalent sind,

wenn die positiv-definiten Formen M_{L_1} und M_{L_2} äquivalent zur selben reduzierten Form sind. Wir erhalten also eine natürliche Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Prinzipalpolarisierungen und den prinzipal-reduzierten Formen mit Determinante d :

$$P(X) \cong \{\text{prinzipal-reduzierte Form mit Determinante } d\}. \quad (*)$$

Lange bestimmt in [33] die Anzahl an Isomorphieklassen von Prinzipalpolarisierungen, wobei die Matrizen der Form M_L mit Hilfe des Isomorphismus $\text{NS}(X) \cong \text{End}^{\text{sym}}(X)$ sowie der Abbildung

$$\Phi : \text{End}(E_1 \times E_2) \rightarrow \text{End}(E_1 \times E_2), \quad \tau \mapsto (1_{E_1} \times \bar{\sigma}) \circ \tau \circ (1_{E_1} \times \sigma)$$

konstruiert werden. Obwohl wir die gleiche Matrixdarstellung für ein Geradenbündel erhalten, unterscheidet sich unserer Ansatz von dem von Lange, da in unserem Fall die Matrizen M_L von elliptischen Kurven stammen.

Mit Hilfe von $(*)$ können wir die prinzipal-reduzierten Formen charakterisieren, welche zu reduziblen Prinzipalpolarisierungen gehören.

Theorem 4.3.23. *Sei $Q = [A, 2B, C]$ eine prinzipal-reduzierte Form von Determinante d . Dann ist jede Prinzipalpolarisierung in der zu Q gehörigen Isomorphieklasse reduzibel genau dann, wenn $B = 0$ gilt.*

Beweis. Wir nehmen zuerst an, dass $B = 0$ gilt. Da Q eine prinzipal-reduzierte Form ist, gilt $\text{ggT}(A, C) = 1$. Sei $S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ ein Basiswechsel, so dass $M_L := S^T Q S$ einer Prinzipalpolarisierung entspricht. Wir müssen eine elliptische Kurve N finden, so dass $L \cdot N = 1$ gilt. Da M_L die Matrixdarstellung einer Prinzipalpolarisierung ist, teilt d die Matrixeinträge $m_{1,2} = \alpha\beta A + \delta\gamma C$ und $m_{2,2} = \beta^2 A + \delta^2 C$.

Wir zeigen zunächst, dass A ein Teiler von δ und C ein Teiler von β ist. Sei p ein Primteiler von A , dann teilt p auch d , da $d = AC$ die Determinante von Q ist. Somit teilt p die Zahlen $m_{1,2}$ und $m_{2,2}$. Das heißt, dass p sowohl $\delta^2 C$ als auch $\delta\gamma C$ teilt. Wegen $\text{ggT}(A, C) = 1$ ist p ein Teiler von δ . Außerdem kann p kein Teiler von γ sein, da γ und δ wegen $\det(S) = 1$ teilerfremd sind. Es folgt somit, dass A ein Teiler von δ ist. Mit einer analogen Argumentation zeigt man, dass C ein Teiler von β ist. Insbesondere gilt also $\text{ggT}(\beta, d) = C$ und wir erhalten

$$\frac{Q(0, 1)}{\text{ggT}(\beta, d)} = 1.$$

Das heißt, dass die elliptische Kurve $N_{-\beta, \delta}$ mit L den Schnitt 1 besitzt. Wir haben somit gezeigt, dass L eine reduzible Prinzipalpolarisierung ist.

Sei nun L eine reduzible Prinzipalpolarisierung. Wir müssen zeigen, dass es einen Basiswechsel $S \in \text{GL}(\mathbb{Z})$ gibt, so dass $S^T M_L S$ eine Diagonalmatrix ist. Da L reduzibel ist, existieren zwei elliptische Kurven E'_1 und E'_2 auf $E_1 \times E_2$, so dass $L \equiv E'_1 + E'_2$ gilt. Nach Lemma 4.3.10 existieren teilerfremde Paare (α, β) und (γ, δ) so dass $E'_1 \equiv N_{\alpha, \beta}$ und $E'_2 \equiv N_{\gamma, \delta}$ gilt. Wir behaupten, dass die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

den gewünschten Basiswechsel liefert.

Wir zeigen dafür zunächst, dass α und γ teilerfremd sind. Sei p eine beliebige Primzahl und wir faktorisieren $\alpha = p^r \alpha'$, $\gamma = p^s \gamma'$ und $d = p^t d'$. Nach Lemma 4.3.11 sind die numerischen Klassen der elliptischen Kurven gegeben durch:

$$N_{\alpha,\beta} \equiv \frac{d\beta^2 F_1 + \alpha^2 F_2 + \alpha\beta\nabla}{\text{ggT}(\alpha, d)} = \frac{p^t d' \beta^2 F_1 + p^{2r} \alpha'^2 F_2 + p^r \alpha' \beta \nabla}{\text{ggT}(p^r, p^t) \cdot \text{ggT}(\alpha', d')},$$

$$N_{\gamma,\delta} \equiv \frac{d\delta^2 F_1 + \gamma^2 F_2 + \gamma\delta\nabla}{\text{ggT}(\gamma, d)} = \frac{p^t d' \delta^2 F_1 + p^{2s} \gamma'^2 F_2 + p^s \gamma' \delta \nabla}{\text{ggT}(p^s, p^t) \cdot \text{ggT}(\gamma', d')}.$$

Falls p ein gemeinsamer Teiler von α und γ ist, dann gilt $1 \leq r, s$. Wir betrachten exemplarisch den Fall $1 \leq r \leq s$, da dieselben Argumente für den Fall $1 \leq s \leq r$ gelten. Wir bestimmen die Schnitzzahl $N_{\alpha,\beta} \cdot N_{\gamma,\delta} = 1$ explizit und erhalten

$$1 = \frac{p^{2r+t}}{\text{ggT}(p^r, p^t) \cdot \text{ggT}(p^s, p^t)} \cdot \frac{\alpha'^2 \delta^2 d' + p^{2(s-r)} \gamma'^2 \beta^2 d' - 2p^{m-n} \alpha' \beta \gamma' \delta d}{\text{ggT}(\alpha', d') \cdot \text{ggT}(\gamma', d')}.$$

Beide Faktoren sind für beliebiges $t \geq 0$ ganzzahlig und zudem ist der linke Faktor mindestens p . Das ist aber ein Widerspruch, da p keine Einheit in \mathbb{Z} ist. Somit haben wir gezeigt, dass α und γ teilerfremd sind.

Als nächstes zeigen wir, dass $\det(S) = \pm 1$ gilt. Die Abbildung

$$\sigma_{\alpha,\beta} \times \sigma_{\gamma,\delta} : E_1 \times E_1 \rightarrow E'_1 \times E'_2 \cong E_1 \times E_2$$

ist eine Isogenie und für den Grad dieser Abbildung gilt

$$\deg(\sigma_{\alpha,\beta} \times \sigma_{\gamma,\delta}) = \deg(\sigma_{\alpha,\beta}) \cdot \deg(\sigma_{\gamma,\delta}) = \text{ggT}(\alpha, d) \cdot \text{ggT}(\gamma, d) = \text{ggT}(\alpha\gamma, d),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Tatsache folgt, dass α und γ teilerfremd sind. Somit ist der Grad der Isogenie $\sigma_{\alpha,\beta} \times \sigma_{\gamma,\delta}$ höchstens d . Andererseits ist der minimale Grad einer Isogenie $E_1 \times E_1 \rightarrow E_1 \times E_2$ mindestens d . Also folgt $\text{ggT}(\alpha\gamma, d) = d$. Unter Verwendung der Gleichung $\text{ggT}(\alpha, d) \cdot \text{ggT}(\gamma, d) = \text{ggT}(\alpha\gamma, d) = d$ erhalten wir für den Schnitt

$$1 = N_{\alpha,\beta} \cdot N_{\gamma,\delta} = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = \det(S)^2.$$

Eine explizite Rechnung zeigt schließlich, dass

$$S^T M_L S = \begin{pmatrix} \text{ggT}(\alpha, d) & 0 \\ 0 & \text{ggT}(\gamma, d) \end{pmatrix}$$

gilt. Falls $\text{ggT}(\alpha, d) > \text{ggT}(\gamma, d)$ gilt, dann tauschen wir die Rollen von E_1 und E_2 , so dass die Diagonalmatrix einer reduzierten quadratischen Form entspricht. \square

Als weitere Anwendung werden wir mit Hilfe des Theorems einen alternativen Beweis für Kanis Thm. 4.3.7 führen. Für diesen Beweis benötigen wir ein geeignetes Kriterium um Numeri Idonei zu identifizieren. Wir verwenden ein Kriterium von Grube [21, Chp. 9], das in [28, Rmk. 18 (b)] verfeinert wurde:

Proposition 4.3.24 ([21], [28]). *Eine ganze Zahl $n \geq 1$ ist eine Numerus Idoneus genau dann, wenn für jedes $B \in \{1, \dots, \lfloor \sqrt{\frac{n}{3}} \rfloor\}$ und für jede ganzzahlige Darstellung*

$$n = AC - B^2$$

mit $2B \leq A \leq C$ und $\text{ggT}(A, 2B, C) = 1$ entweder $A = C$ oder $A = 2B$ gilt.

Beweis von Thm. 4.3.7. Wir müssen zeigen, dass auf $E_1 \times E_2$ genau dann keine irreduzible Prinzipalpolarisierung existiert, wenn $d = 1$ ist oder d eine gerade Numerus Idoneus ist, welche nicht durch 8 teilbar ist.

Wir zeigen zunächst, dass d eine Numerus Idoneus ist. Angenommen d sei keine solche Zahl, dann existieren nach Prop. 4.3.24 natürliche Zahlen $A, B, C \in \mathbb{N}$ mit

- $d = AC - B^2$,
- $\text{ggT}(A, 2B, C) = 1$,
- $0 < 2B \leq A \leq C$,
- $A \neq C$ und $A \neq 2B$.

Die quadratische Form $Q = [A, 2B, C]$ ist prinzipal-reduziert mit Determinante d und entspricht somit einer Isomorphieklasse von Prinzipalpolarisierungen auf $E_1 \times E_2$. Wegen $B \neq 0$ besteht die zu Q gehörige Klasse nach Thm. 4.3.23 aus irreduziblen Prinzipalpolarisierungen.

Um den Beweis zu vervollständigen, bleibt es zu zeigen, dass eine Numerus Idoneus d genau dann keine Darstellung $d = AC - B^2$ mit $\text{ggT}(A, B, C) = 1$ und $0 < 2B \leq A \leq C$ besitzt, wenn $d = 1$ oder $d \equiv 2, 4, 6$ modulo 8 ist. Der Fall $d = 1$ ist klar, da es keine Darstellung $1 = AC - B^2$ unter der Voraussetzung $0 < 2B \leq A \leq C$ gibt. Als nächstes betrachten wir die Fälle, dass $d \geq 3$ ungerade oder d durch 8 teilbar ist. Falls $d \geq 3$ ungerade ist, dann liefert $Q = [A, 2B, C]$ mit $(A, B, C) = (2, 1, \frac{d+1}{2})$ eine quadratische Form, deren Isomorphieklasse aus irreduziblen Prinzipalpolarisierungen besteht. Im Fall $d \equiv 0$ modulo 8 liefert $(A, B, C) = (4, 1, \frac{d+4}{4})$ für $d > 8$ eine Klasse von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen und für $d = 8$ haben wir $(A, B, C) = (3, 1, 3)$.

Abschließend müssen wir noch zeigen, dass es keine Klasse von irreduziblen Prinzipalpolarisierungen gibt, falls $d \equiv 2, 4, 6$ modulo 8 gilt.

- Falls $d \equiv 2$ oder $d \equiv 6$: Wir schreiben $d = 2d'$ für eine ungerade Zahl d' . Wir nehmen an, es gäbe eine Darstellung $d = AC - B^2$ mit $\text{ggT}(A, B, C) = 1$ und $0 > 2B \leq A \leq C$. Aus Prop. 4.3.24 folgt nun, dass $A = 2B$ oder $A = C$ gelten muss.
Falls $A = 2B$ gilt, so haben wir $2d' = 2BC - B^2$ und folglich muss B gerade sein. Dann ist jedoch $d = 2BC - B^2$ durch 4 teilbar, was ein Widerspruch zu $d \equiv 2$ bzw. $d \equiv 6$ modulo 8 ist.
Falls $A = C$ gilt, so haben wir $2d' = A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. Wegen $\text{ggT}(A, B) = 1$ müssen A und B ungerade sein, da sonst $A^2 - B^2$ nicht durch 2 teilbar ist. Dann ist jedoch $d = (A-B)(A+B) \equiv 0$ modulo 8, also ein Widerspruch.
- Falls $d \equiv 4$: Wir schreiben $d = 4d'$ für eine ungerade Zahl d' . Wir nehmen erneut an, es gäbe eine Darstellung $d = AC - B^2$ mit $\text{ggT}(A, B, C) = 1$ und $0 > 2B \leq A \leq C$. Wieder folgt, dass entweder $A = 2B$ oder $A = C$ gilt.

Falls $A = 2B$ gilt, so haben wir $4d' = 2BC - B^2$ und folglich muss B gerade sein. Wir schreiben $B = 2^n B'$ für eine ungerade Zahl B' und $n \geq 1$. Wegen $d = 4d' = 2^{n+1}B'C - 2^{2n}B'^2$ muss $n = 1$ gelten, da sonst $d \equiv 0$ modulo 8 gilt. Da d' und B' ungerade sind, folgt aus $d' = B'C - B'^2$, dass C gerade sein muss. Das ist jedoch unmöglich, da dies $\text{ggT}(A, B, C) \geq 2$ zur Folge hätte.

Falls $A = C$ gilt, so haben wir $4d' = A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$. Wegen $\text{ggT}(A, B) = 1$ müssen A und B ungerade sein, da sonst $A^2 - B^2$ nicht durch 2 teilbar ist. Dann ist jedoch $d = (A - B)(A + B) \equiv 0$ modulo 8, also ein Widerspruch.

□

4.4. Produkte $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation

Abschließend untersuchen wir mit ähnlichen Methoden Produkte von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation. Wir wiederholen die Notation und Konvention aus Abschnitt 4.2: Wir wählen die elliptischen Kurven $E_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1$ und $E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_2$, so dass

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}u\tau \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \Lambda_2$$

für ein $u \in \mathbb{Z}$ und $\tau \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gilt. In dieser Situation gilt $\text{End}(E_1) \subset \text{Hom}(E_1, E_2)$ und, da \mathbb{Z} jeweils primitives Untergitter von $\text{End}(E_1)$ und $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ist, liefert der Elementarteilersatz uns die Existenz von Elementen $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}$ so, dass in der analytischen Darstellung

$$\text{End}(E_1) = \mathbb{Z}[f_1\omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}s\sigma \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sigma = \text{Hom}(E_1, E_2)$$

gilt. Um in dieser Situation das 1-Element von $\text{End}(E_i)$ und $\text{Hom}(E_1, E_2)$ unterscheiden zu können, verwenden wir für das 1-Element in $\text{Hom}(E_1, E_2)$ die Notation $\mathbb{1}$, d. h.

$$\mathbb{1} : E_1 \rightarrow E_2, \quad x + \Lambda_1 \mapsto x + \Lambda_2.$$

Diese Unterscheidung dient dazu, um zu verdeutlichen, dass der Homomorphismus $\mathbb{1}$ im Allgemeinen keine Identität ist und den Grad u besitzt.

Bemerkung 4.4.1. Die im nachfolgenden Abschnitt verwendete Methode lässt sich auch für beliebige Gitter Λ_1 und Λ_2 und eine beliebige Basis von $\text{Hom}(E_1, E_2)$ durchführen. Allerdings reduzieren wir durch unsere Konvention die Anzahl der Variablen wegen des Zusammenhangs $\deg(\mathbb{1}) = u$.

4.4.1. Néron-Severi-Gruppe im Fall mit komplexer Multiplikation

Wie im Fall ohne komplexe Multiplikation, existiert auf $E_1 \times E_2$ die Prinzipalpolarisierung $L_0 \equiv (E_1 \times \{0\}) + (\{0\} \times E_2)$, welche durch die Prinzipalpolarisierungen von E_1 und E_2 induziert wird. Somit werden wir mit Hilfe des Isomorphismus

$$\varphi_{L_0} : \text{NS}(E_1 \times E_2) \xrightarrow{\sim} \text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) \quad L \mapsto \phi_{L_0}^{-1} \phi_L$$

eine Basis für die Néron-Severi-Gruppe konstruieren. Der symmetrische Endomorphismenring von $E_1 \times E_2$ bzgl. L_0 unter der obigen Konvention ist nach Lemma 4.3.1 gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \cdot \hat{\mathbb{1}} + d \cdot \hat{\sigma} \\ c \cdot \mathbb{1} + d \cdot \sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & u(c + d\bar{\sigma}) \\ c + d\sigma & b \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}, \end{aligned}$$

und die Elemente

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\mathbb{1}} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma} \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis von $\text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2)$. Die Urbilder dieser Elemente liefern unter dem Isomorphismus

$$\varphi_{L_0} : \text{NS}(E_1 \times E_2) \xrightarrow{\sim} \text{End}^{\text{sym}}(E_1 \times E_2) \quad L \mapsto \Phi_{L_0}^{-1} \Phi_L$$

die Basis

$$F_1 = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_1), \quad F_2 = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_2), \quad \nabla = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_3), \quad \Sigma = \varphi_{L_0}^{-1}(\alpha_4)$$

von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$, wobei nach Konstruktion $L_0 = F_1 + F_2$ gilt.

Die charakteristischen Polynome der Endomorphismen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und α_4 sind

$$P_{\alpha_1}^a(t) = P_{\alpha_2}^a(t) = t^2 - t, \quad P_{\alpha_3}^a(t) = t^2 - u \quad \text{und} \quad P_{\alpha_4}^a(t) = t^2 - \deg(\sigma).$$

Zusätzlich benötigen wir die charakteristischen Polynome von $\beta_1 := \alpha_1 + \alpha_3$, $\beta_2 := \alpha_1 + \alpha_4$ und $\beta_3 := \alpha_3 + \alpha_4$ zur Bestimmung der Schnittmatrix. Diese sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P_{\beta_1}^a(t) &= t^2 - t - u, & P_{\beta_2}^a(t) &= t^2 - t - \deg(\sigma), & \text{sowie} \\ P_{\beta_3}^a(t) &= t^2 - (u + \deg(\sigma) + (\hat{\mathbb{1}} \cdot \sigma + \hat{\sigma} \cdot \mathbb{1})) = t^2 - \deg(\mathbb{1} + \sigma). \end{aligned}$$

Mit Prop. 1.2.2 erhalten wir die folgenden Schnittzahlen:

- $F_i^2 = F_i \cdot \nabla = F_i \cdot \sigma = 0$ für $i = 1, 2$
- $F_1 \cdot F_2 = 1$
- $\nabla^2 = -2u$
- $\Sigma^2 = -2\deg(\sigma) = -2u|\sigma|^2$
- $\nabla \cdot \Sigma = -(\deg(\mathbb{1} + \sigma) - u - \deg(\sigma)) = -(\hat{\mathbb{1}} \cdot \sigma + \hat{\sigma} \cdot \mathbb{1}) = -2u \text{Re}(\sigma).$

Proposition 4.4.2. *Seien E_1 und E_2 elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation mit $\text{Hom}(E_1, E_2) = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{1} + \mathbb{Z}\sigma$. Dann bilden die Fasern der Projektionen $F_1 = \{0\} \times E_2$*

und $F_2 = E_1 \times \{0\}$ zusammen mit den Elementen ∇ und Σ eine Basis von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$. Die Basis $(F_1, F_2, \nabla, \Sigma)$ besitzt die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u & -2u \operatorname{Re}(\sigma) \\ 0 & 0 & -2u \operatorname{Re}(\sigma) & -2u|\sigma|^2 \end{pmatrix},$$

und $E_1 \times E_2$ besitzt die Diskriminante

$$\Delta(E_1 \times E_2) = -(4u^2|\sigma|^2 - 4u^2 \operatorname{Re}(\sigma)^2) = -4u^2 \operatorname{Im}(\sigma)^2.$$

Bornträger bestimmte in [4] das Volumen des Nef-Kegel und benötigte dafür die Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe. Dabei wurde folgender Zusammenhang zu den Erzeugern der Endomorphismenringe von E_1 und E_2 hergestellt:

Satz 4.4.3 ([4, Thm. 3.5]). *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Die Endomorphismenringe seien wie in Abschnitt 4.2 gegeben durch $\operatorname{End}(E_i) = \mathbb{Z}[f_i\omega]$. Dann gilt für die Diskriminante von $\text{NS}(E_1 \times E_2)$*

$$\Delta(E_1 \times E_2) = -4 \cdot \operatorname{kgV}(f_1, f_2)^2 \cdot \operatorname{Im}(\omega)^2.$$

Aus dem Hodge-Index-Satz folgt, dass die Teilmatrix in Prop. 4.4.2

$$\begin{pmatrix} 2u & 2u \operatorname{Re}(\sigma) \\ 2u \operatorname{Re}(\sigma) & 2u|\sigma|^2 \end{pmatrix}$$

positiv-definit ist und somit nach Satz 1.3.6 äquivalent zu einer eindeutigen reduzierten Matrix ist.

Korollar 4.4.4. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Dann gibt es eine Basis (F_1, F_2, F_3, F_4) der Néron-Severi-Gruppe, so dass die Schnittmatrix von der folgenden Form ist:*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}, \quad 0 \leq B \leq A \leq C.$$

Das verbesserte Nakai-Moishezon-Kriterium auf abelschen Varietäten liefert:

Lemma 4.4.5. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Ein Geradenbündel*

$$L = \mathcal{O}_{E \times E}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla + a_4 \Sigma)$$

ist genau dann ample, wenn die folgenden zwei Ungleichungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} a_1 &> 0 \\ a_1 a_2 - u a_3^2 - u |\sigma|^2 a_4^2 - u \operatorname{Re}(\sigma) a_3 a_4 &> 0. \end{aligned}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus verbessertem Nakai-Moishezon-Kriterium für das ample Geradenbündel $\mathcal{O}_{E_1 \times E_2}(F_1 + F_2)$. Unter der Annahme $L^2 > 0$ gilt außerdem, dass $a_1 + a_2$ positiv ist genau dann, wenn a_1 positiv ist, da die Teilmatrix $\begin{pmatrix} 2u & 2u \operatorname{Re}(\sigma) \\ 2u \operatorname{Re}(\sigma) & 2u|\sigma|^2 \end{pmatrix}$ positiv-definit ist. \square

Auch hier ist es hilfreich die folgende Basis bestehend aus elliptischen Kurven zu betrachten, da wir über diese die Schnitte der elliptischen Kurven mit den Erzeugern ∇ und Σ bestimmen können:

Proposition 4.4.6. *Seien E_1 und E_2 elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Dann bilden die Fasern der Projektionen $F_1 = \{0\} \times E_2$ und $F_2 = E_1 \times \{0\}$ zusammen mit den Graphen Δ und Γ der Isogenien $\mathbb{1}$ und σ eine Basis von $\operatorname{NS}(E_1 \times E_2)$. Die Basis $(F_1, F_2, \Delta, \Gamma)$ besitzt die Schnittmatrix*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & u & \deg(\sigma) \\ 1 & u & 0 & \deg(\mathbb{1} - \sigma) \\ 1 & \deg(\sigma) & \deg(\mathbb{1} - \sigma) & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt

$$\nabla \equiv \Delta - uF_1 - F_2 \quad \text{und} \quad \Sigma \equiv \Gamma - \deg(\sigma)F_1 - F_2.$$

Beweis. Wie in Prop. 4.3.4 lassen sich die Schnittzahlen der elliptischen Kurven und die Schnittmatrix S dieser Basis bestimmen. Dies liefert die gewünschte Schnittmatrix. Es verbleibt zu zeigen, dass die Determinante dieser Matrix mit der Diskriminante der Néron-Severi-Gruppe übereinstimmt. Eine explizite Rechnung unter Verwendung der Identität

$$\deg(\mathbb{1} - \sigma) = u + \deg(\sigma) + 2u \operatorname{Re}(\sigma)$$

zeigt, dass $\det(S) = \Delta(E_1 \times E_2)$ gilt. \square

Auch in diesem Fall liefert diese Basis einen Kegel, in dem wir die Seshadri-Konstanten leicht berechnen können:

Proposition 4.4.7. *Sei A eine abelsche Fläche mit $\rho = 4$ und $(F_1, F_2, \Delta, \Gamma)$ die Basis wie in Prop. 4.4.6. Für ein Geradenbündel*

$$L = \mathcal{O}_{E \times E}(a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Gamma)$$

mit $a_i \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon(L) &= \min \{ L \cdot F_1, L \cdot F_2, L \cdot \Delta, L \cdot \Gamma \} \\ &= \min \{ a_2 + a_3 + a_4, \\ &\quad a_1 + ua_3 + a_4, \\ &\quad a_1 + ua_2 + \deg(\mathbb{1} - \sigma)a_4, \\ &\quad a_1 + \deg(\sigma)a_2 + \deg(\mathbb{1} - \sigma)a_3 \}. \end{aligned}$$

Beweis. Sei D der Divisor $a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\Delta + a_4\Gamma$ und sei C eine beliebige irreduzible Kurve, welche keine Komponente von D ist und durch den Punkt 0 geht. Da D effektiv ist, können wir die Schnittungleichung anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{L \cdot C}{\text{mult}_0 C} &= \frac{D \cdot C}{\text{mult}_0 C} \geq \frac{\text{mult}_0 D \cdot \text{mult}_0 C}{\text{mult}_0 C} \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\ &\geq a_2 + a_3 + a_4 = L \cdot F_1. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ von einer Komponente von D berechnet wird. Die Schnittzahlen von D mit dessen Komponenten ergeben sich aus Prop. 4.4.6. \square

Bemerkung 4.4.8. Durch das Vertauschen der Rollen von E_1 und E_2 erhalten wir eine weitere Basis. Seien dazu $\hat{1} : E_2 \rightarrow E_1$ und $\hat{\sigma} : E_2 \rightarrow E_1$ die zu 1 und σ dualen Isogenien und $\hat{\Delta}$ der Graph von $\hat{1}$ sowie $\hat{\Gamma}$ der Graph von $\hat{\sigma}$. Mit demselben Argument wie in Prop. 4.3.4 lässt sich zeigen, dass die Elemente $F_1, F_2, \hat{\Delta}, \hat{\Gamma}$ eine Basis der Néron-Severi-Gruppe bilden.

Analog zu Prop. 4.4.7 können wir die Seshadri-Konstanten von Geradenbündeln in dem von $(F_1, F_2, \hat{\Delta}, \hat{\Gamma})$ erzeugtem Kegel berechnen. Die von $(F_1, F_2, \Delta, \Gamma)$ und $(F_1, F_2, \hat{\Delta}, \hat{\Gamma})$ erzeugten Kegel unterscheiden sich im Allgemeinen, da es möglich ist, dass wir durch den Basiswechsel negative Koeffizienten erhalten:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} &\equiv (1 - u)F_1 + (u - 1)F_2 + \Delta, \\ \bar{\Gamma} &\equiv (1 - \deg(\sigma))F_1 + (\deg(\sigma) - 1)F_2 + \Gamma. \end{aligned}$$

Insbesondere zeigt sich, dass die beiden Kegel genau dann übereinstimmen, wenn beide Isogenien den Grad 1 besitzen. Offensichtlich sind in diesem Fall die elliptischen Kurven E_1 und E_2 isomorph und es gilt $\text{Hom}(E_1, E_2) = \text{End}(E_1) = \mathbb{Z}[f_1\omega]$. Der Erzeuger $f_1\omega$ besitzt genau dann Grad eins, wenn $f_1 = 1$ ist und $\omega = i$ oder $\omega = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$ gilt.

4.4.2. Ganzzahligkeit der Seshadri-Konstanten im Fall mit komplexer Multiplikation

Wir werden nun untersuchen, auf welchen Produkten von elliptischen Kurven alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. In [7, Thm. 2, Thm. 4.9] zeigt Schulz, dass in den beiden Fällen $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ und $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ alle amplen Geradenbündel auf $E \times E$ stets ganzzahlige Seshadri-Konstanten besitzen. Wir werden zeigen, dass diese beiden Fälle tatsächlich auch die einzigen Produkte von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation sind, in denen alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind:

Theorem 4.4.9. *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

- (i) *Für jedes ample Geradenbündel L auf $E_1 \times E_2$ ist die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig.*
- (ii) *Die elliptischen Kurven E_1 und E_2 sind isomorph und besitzen entweder den Endomorphismenring $\mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$.*

Kani beantwortet in [29, Cor. 3] im Fall $\rho = 4$ vollständig die Frage, wann die Fläche $E_1 \times E_2$ eine irreduzible Prinzipalpolarisierung besitzt. Er zeigt, dass es genau 15 Klassen gibt, die keine irreduzible Prinzipalpolarisierung besitzen:

Theorem 4.4.10 ([29, Thm. 2, Cor. 3]). *Seien E_1 und E_2 isogene elliptische Kurven mit komplexer Multiplikation. Dann gilt die folgende Äquivalenz:*

- (i) *Es gibt keine irreduzible Prinzipalpolarisierung auf $E_1 \times E_2$.*
- (ii) *Es gibt eine Basis der Néron-Severi-Gruppe $\text{NS}(E_1 \times E_2)$, so dass die Schnittmatrix die folgende Form besitzt:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix},$$

mit

$$\begin{aligned} T \in & \left\{ k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mid k = 1, 2, 4, 6, 10 \right\} \cup \left\{ k \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \mid k = 1, 2, 6 \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \right\} \\ & \cup \left\{ \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der beiden Fälle von Schulz, verbleiben somit 13 Fälle, in denen unklar ist, ob alle Seshadri-Konstanten ganzzahlig sind. Ohne auf das Resultat von Kani zurückgreifen zu müssen, werden wir wie im Fall, in dem keine komplexe Multiplikation existiert, eine explizite Konstruktion eines Geradenbündels angeben, welches keine schwach-submaximale elliptische Kurve besitzt.

Beweis von Thm. 4.4.9. Sei (F_1, \dots, F_4) eine Basis wie in Korollar 4.4.4, d. h. die Schnittmatrix ist von der Form

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -T & \\ 0 & 0 & & \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix}, \quad 0 \leq B \leq A \leq C.$$

Schulz zeigte in [7, Thm. 4.8, Thm. 4.9], dass im Fall $E \times E$ mit $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ oder $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})]$ die Seshadri-Konstante immer von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Proposition 4.4.2 zeigt, dass dies genau dann der Fall ist, falls gilt

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden uns nun den anderen Fällen zu: Unser Ziel ist es, dass wir ein amples Geradenbündel L in Abhängigkeit von T konstruieren, welches die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:

- (i) $\sqrt{L^2} < d := \det(T)$,
- (ii) $L \cdot M \in d \cdot \mathbb{Z}$ für alle Geradenbündel $M \in \text{NS}(E_1 \times E_2)$.

Somit ist der Schnitt mit jeder elliptischen Kurve mindestens d und folglich kann es keine schwach-submaximalen elliptischen Kurven geben.

Zunächst konstruieren wir ample Geradenbündel, deren Schnitt mit allen anderen Geradenbündeln durch d teilbar ist. Wir betrachten dazu $L_{x,y} := dF_1 + dB_2 + xB_3 + yB_4$. Der Schnitt mit einem beliebigen Geradenbündel $M = \sum c_i F_i$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L_{x,y} \cdot M &= dc_1 + dc_2 - (2Axc_3 + Bxc_4 + Byc_3 + 2Cyc_4) \\ &= dc_1 + dc_2 - (2Ax + By)c_3 - (2Cy + Bx)c_4. \end{aligned}$$

Wir sehen also: Der Schnitt $L_{x,y} \cdot M$ ist für alle Geradenbündel M durch d teilbar genau dann, wenn gilt:

$$2Ax + By \equiv 0 \pmod{d} \quad \text{und} \quad 2Cy + Bx \equiv 0 \pmod{d}.$$

Gesucht sind also Lösungen (x, y) für dieses Kongruenzensystem. Diese Bedingungen sind äquivalent dazu, dass es zwei ganze Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ gibt, mit

$$2Ax + By = \alpha d \quad \text{und} \quad 2Cy + Bx = \beta d.$$

Indem wir diese Gleichungen nach x und y auflösen, erhalten wir für ein gewähltes Paar (α, β) eine eindeutige Lösung (x, y) . Diese Zuordnung ist gegeben durch

$$x = 2C\alpha - B\beta \quad \text{und} \quad y = 2A\beta - B\alpha,$$

und liefert uns Geradenbündel der Form

$$L_{\alpha,\beta} := dF_1 + dF_2 + (2C\alpha - B\beta)F_3 + (2A\beta - B\alpha)F_4$$

mit der gewünschten Eigenschaft (ii). Man beachte jedoch, dass an dieser Stelle noch nicht garantiert ist, dass $L_{\alpha,\beta}$ ample ist.

Im nächsten Schritt werden wir nun die Bedingungen betrachten, dass $L_{\alpha,\beta}$ ample ist und die Eigenschaft (i) erfüllt ist, d. h.

$$0 < L_{\alpha,\beta}^2 < d^2.$$

Den Selbstschnitt können wir folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} L_{\alpha,\beta}^2 &= 2d^2 - \left[\begin{pmatrix} 2C & -B \\ -B & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right]^T \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2C & -B \\ -B & 2A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= 2d^2 - d \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gibt also genau dann ein amplex Geradenbündel mit den Eigenschaften (i) und (ii), wenn es eine Lösung (α, β) der Ungleichung

$$d < \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} < 2d$$

gibt. Das nachfolgende Lemma 4.4.11 garantiert uns die Existenz einer solchen Lösung. \square

Lemma 4.4.11. *Sei $[A, B, C] := Ax^2 + Bxy + Cy^2$ eine positiv-definite binäre quadratische Form mit $0 \leq B \leq A \leq C$. Es gilt $[A, B, C] \in \{[1, 0, 1], [2, 0, 2], [2, 2, 2]\}$ genau dann, wenn die folgende Ungleichung keine Lösung $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2$ besitzt*

$$AC - \frac{B^2}{4} < A\alpha^2 + B\alpha\beta + C\beta^2 < 2 \left(AC - \frac{B^2}{4} \right).$$

Beweis. Für $[A, B, C] \in \{[1, 0, 1], [2, 0, 2], [2, 2, 2]\}$ ist es offensichtlich, dass es keine Lösung $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}$ geben kann.

Sei nun $[A, B, C]$ verschieden von $[1, 0, 1]$, $[2, 0, 2]$ und $[2, 2, 2]$. Ziel ist es, eine allgemeine Konstruktion von $(\alpha, -\beta)$ anzugeben, die die Ungleichungen erfüllen. Wir betrachten zunächst die Ungleichung

$$AC - \frac{B^2}{4} < A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2. \quad (1)$$

Wir setzen $\beta := \lfloor \sqrt{A} \rfloor$. Dann liefert uns (1) die quadratische Ungleichung

$$0 < Ax^2 - B\beta x + C\beta^2 - AC + \frac{B^2}{4} := p(x).$$

Wir bestimmen die Nullstellen des Polynoms p und wählen die größte Nullstelle. Diese ist gegeben durch

$$x_0 = \frac{1}{2A} \left(B\beta + \sqrt{4A^2C + B^2\beta^2 - AB^2 - 4AC\beta^2} \right).$$

Wegen $A > 0$ folgt, dass für $\alpha := \lfloor x_0 + 1 \rfloor$ die Ungleichung (1) erfüllt ist.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass auch die zweite Ungleichung, d. h.

$$4(A\alpha^2 - B\alpha\beta + C\beta^2) < 4 \left(2AC - \frac{B^2}{2} \right) \quad (2)$$

erfüllt ist. Wir schätzen daher den Term

$$(*) := 4A\alpha^2 - 4B\alpha\beta + 4C\beta^2 + 2B^2$$

nach oben ab. Zunächst erhalten wir wegen $x_0 < \alpha \leq x_0 + 1$ die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} (*) &\leq 4A(x_0 + 1)^2 - 4Bx_0\beta + 4C\beta^2 + 2B^2 \\ &= 4(Ax_0^2 - Bx_0\beta + C\beta^2) + 8Ax_0 + 4A + 2B^2 \\ &= 4 \left(AC - \frac{B^2}{4} \right) + 8Ax_0 + 4A + 2B^2. \end{aligned}$$

Es folgt somit: Ungleichung (2) ist erfüllt, falls gilt

$$8Ax_0 + 4A + B^2 < 4AC.$$

Nach Einsetzen von x_0 erhalten wir die Bedingung

$$4B\beta + 4\sqrt{4A^2C + B^2\beta^2 - AB^2 - 4AC\beta^2} + 4A + B^2 < 4AC.$$

Wegen $\beta^2 = (\lfloor \sqrt{A} \rfloor)^2 \leq A$ gilt $B^2\beta^2 - AB^2 \leq 0$ und somit erhalten wir für den Wurzelterm:

$$\sqrt{4A^2C - 4AC\beta^2} \leq 2A\sqrt{C}\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{A}}.$$

Schließlich erhalten wir die Bedingung

$$(**) := 4B\beta + 8A\sqrt{C}\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{A}} + 4A + B^2 < 4AC. \quad (2a)$$

Falls β die Ungleichung (2a) erfüllt, so sind nach Konstruktion die Ungleichungen (1) und (2) für das Paar $(\alpha, -\beta)$ erfüllt.

Wir zeigen zunächst, dass diese Ungleichung für $A \geq 14$ stets erfüllt ist. Anschließend werden wir die verbleibenden Fälle betrachten. Unter Verwendung von $B \leq A$ und $\beta \leq \sqrt{A}$ erhalten wir

$$(**) \leq 4A\sqrt{A} + 8A\sqrt{C}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{A}}} + 4A + A^2 < 4AC.$$

Nach Kürzen mit A und unter Verwendung von $14 \leq A \leq C$ ist die Ungleichung (2) erfüllt, da die Ungleichung

$$4\sqrt{C} + 8\sqrt{C}\sqrt{\frac{2}{\sqrt{C}}} + 4 + C < 4C$$

gilt. Unter Verwendung der expliziten Darstellung von $\beta = \lfloor \sqrt{A} \rfloor$ in (**) zeigt sich, dass die Ungleichung (2a) auch für die Werte $9 \leq A \leq 13$ erfüllt ist.

Für die verbleibenden Werte für A verwenden wir zunächst die Ungleichung (2a) und erhalten auf diese Weise eine untere Schranke r_A , so dass $(\alpha, -\beta)$ für alle $C \geq r_A$ die Ungleichungen (1) und (2) erfüllen. Es verbleiben anschließend endlich viele Fälle, für welche wir explizite Lösungen angeben:

- Fall $A = 8$: Für die quadratischen Formen $[8, B, C]$ mit $C \geq 10$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ aus der vorherigen Konstruktion die Ungleichungen (1) und (2a). Für $C = 8$ und $C = 9$ ist $(0, 3)$ eine Lösung der Ungleichungen (1) und (2).
- Fall $A = 7$: Für die quadratischen Formen $[7, B, C]$ mit $C \geq 9$ erfüllt das konstruierte Paar $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 7$ und $C = 8$ ist $(0, 3)$ eine Lösung.
- Fall $A = 6$: Für die quadratischen Formen $[6, B, C]$ mit $C \geq 8$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 6$ und $C = 7$ ist $(1, -3)$ eine Lösung.
- Fall $A = 5$: Für die quadratischen Formen $[5, B, C]$ mit $C \geq 7$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 5$ und $C = 6$ ist $(2, -2)$ eine Lösung.

- Fall $A = 4$: Für die quadratischen Formen $[4, B, C]$ mit $C \geq 5$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 4$ und $0 \leq B \leq 3$ ist $(1, -2)$ eine Lösung der Ungleichungen und für die Form $[4, 4, 4]$ ist $(2, -2)$ eine Lösung.
- Fall $A = 3$: Für die quadratischen Formen $[3, B, C]$ mit $C \geq 8$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $3 \leq C \leq 7$ ist $(1, -2)$ eine Lösung der Ungleichungen.
- Fall $A = 2$: Für die quadratischen Formen $[2, B, C]$ mit $C \geq 6$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 2$ verbleibt nur die Form $[2, 1, 2]$ und für diese ist $(1, 1)$ eine Lösung der Ungleichungen. Für $C = 3$ und $C = 4$ ist $(2, -1)$ und für $C = 5$ ist $(2, 1)$ eine Lösung.
- Fall $A = 1$: Für die quadratischen Formen $[1, B, C]$ mit $C \geq 3$ erfüllt $(\alpha, -\beta)$ die Ungleichungen. Für $C = 1$ verbleibt nur die Form $[1, 1, 1]$ und für diese ist $(1, -1)$ eine Lösung der Ungleichungen. Für $C = 2$ ist $(1, -1)$ eine Lösung.

□

Die hier konstruierten Geradenbündel können eine ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen. Folgendes Beispiel zeigt, dass es auch auf abelschen Flächen vom Rang 4 Geradenbündel gibt, die eine ganzzahlige Seshadri-Konstante besitzen, die jedoch nicht von einer elliptischen Kurve berechnet werden:

Lemma 4.4.12. *Es existiert eine abelsche Fläche A mit $\rho = 4$ und ein primitives Geradenbündel L auf A , so dass die Seshadri-Konstante $\varepsilon(L)$ ganzzahlig ist und nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird.*

Beweis. Sei E eine elliptische Kurve mit $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Dann ist die Schnittmatrix von $E \times E$ bzgl. der Basis $(F_1, F_2, \Delta, \Gamma)$ gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen zunächst, dass $L_0 := \mathcal{O}_{E \times E}(-F_1 + \Delta + \Gamma)$ eine irreduzible Prinzipalpolarisierung ist. Offensichtlich gilt $L_0^2 = 2$. Wir müssen also noch ausschließen, dass es eine elliptische Kurve E mit $L_0 \cdot E = 1$ gibt. Wir betrachten dazu den Schnitt mit einem beliebigen Geradenbündel $M = a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \Delta + a_4 \Gamma$ und erhalten

$$L_0 \cdot M = 2a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4.$$

Dies impliziert, dass es keine elliptische Kurve E mit $L_0 \cdot E = 1$ geben kann, da der Schnitt mit jedem beliebigen Geradenbündel ein Vielfaches von 2 ist. Die Seshadri-Konstante von L_0 wird somit von einer irreduziblen Kurve $C \in |4L_0|$ mit $\text{mult}_0(C) = 6$ berechnet.

Wir betrachten nun den Divisor

$$\begin{aligned} D &:= 3C + F_1 + F_2 + \Delta \\ &\equiv -11F_1 + F_2 + 13\Delta + 12\Gamma. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass $\varepsilon(\mathcal{O}_{E \times E}(D)) = 20$ gilt und die Seshadri-Konstante nicht von einer elliptischen Kurve berechnet wird. Wir haben

$$\frac{\mathcal{O}_{E \times E}(D) \cdot D}{\text{mult}_0(D)} = \frac{D^2}{\text{mult}_0 D} = \frac{438}{21} < \sqrt{438} = \sqrt{\mathcal{O}_{E \times E}(D)^2},$$

und somit ist D submaximal für $\mathcal{O}_{E \times E}(D)$. Nach Prop. 1.1.18 ist jede submaximale Kurve eine Komponente von D . Wir berechnen daher die Seshadri-Quotienten von C , F_1 , F_2 und Δ und erhalten

$$\frac{\mathcal{O}_{E \times E}(D) \cdot C}{\text{mult}_0 C} = 20 < 26 = \mathcal{O}_{E \times E} \cdot F_1 = \mathcal{O}_{E \times E} \cdot F_2 = \mathcal{O}_{E \times E} \cdot \Delta.$$

Also gilt $\varepsilon(\mathcal{O}_{E \times E}(D)) = 20$ und die Seshadri-Kurve ist nicht elliptisch. \square

4.4.3. Elliptische Kurven auf Produkten von zwei isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation

Auch wenn wir bereits die Frage nach der Ganzzahligkeit vollständig geklärt haben, bestimmen wir abschließend die numerischen Klassen von elliptischen Kurven auf Produkten $E_1 \times E_2$ von isogenen elliptischen Kurven mit komplexer Multiplikation. Wir wiederholen die Notation aus dem Abschnitt 4.2: Wir wählen $E_1 = \mathbb{C}/\Lambda_1$ und $E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_2$ so, dass $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$

$$\Lambda_1 = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}u\tau \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \Lambda_2$$

gilt. In dieser Situation gilt $\text{End}(E_1) \subset \text{Hom}(E_1, E_2)$. Da \mathbb{Z} jeweils primitive Untergitter von $\text{End}(E_1)$ und $\text{Hom}(E_1, E_2)$ ist, liefert der Elementarteilersatz uns die Existenz von Elementen $\sigma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\text{End}(E_1) = \mathbb{Z}[f_1\omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}s\sigma \subset \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sigma = \text{Hom}(E_1, E_2)$$

gilt. Wie zuvor verwenden wir für das 1-Element in $\text{Hom}(E_1, E_2)$ mit dem Grad u die Schreibweise $\mathbb{1}$.

Für jede elliptische Kurve N gibt es nach Lemma 4.3.10 ganze Zahlen $(a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$, so dass N ein Translat von

$$N_{a,b,c,d} := \{((a + bs\sigma)x, (c \cdot \mathbb{1} + d\sigma)x \mid x \in E_1\}$$

ist. Für die Bestimmung der numerischen Klasse ist es notwendig, die Schnitte der elliptischen Kurve $N_{a,b,c,d}$ mit den elliptischen Kurven F_1, F_2, Δ und Γ zu berechnen. Da sich $N_{a,b,c,d}$ und F_1 für $(a, b) \neq (0, 0)$ eigentlich schneiden, haben wir

$$N_{a,b,c,d} \cdot F_1 = \#(N_{a,b,c,d} \cap F_1) = \frac{\#\{(x \in E_1 \mid (a + bs\sigma)x = 0\}}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})},$$

wobei $\sigma_{a,b,c,d} : E_1 \rightarrow N_{a,b,c,d}$ die Isogenie $x \mapsto ((a + bs\sigma)x, (c + d\sigma)x)$ ist. Der Zähler entspricht dem Grad der Abbildung $E_1 \rightarrow E_1, x \mapsto (a + bs\sigma)x$ und ist somit $|a + bs\sigma|^2$. Im Fall $(a, b) = (0, 0)$ gilt $N_{a,b,c,d} = F_1$ und damit $N_{a,b,c,d} \cdot F_1 = 0$. Wir können also auch in

diesem Fall den Schnitt durch die Formel $|a + bs\sigma|^2 / \deg(\sigma_{a,b,c,d})$ darstellen. Mit demselben Argument erhalten wir daher

$$\begin{aligned} N_{a,b,c,d} \cdot F_1 &= \frac{|a + bs\sigma|^2}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}, & N_{a,b,c,d} \cdot \Delta &= \frac{u|(c + d\sigma) - (a + bs\sigma)|^2}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}, \\ N_{a,b,c,d} \cdot F_2 &= \frac{u|c + d\sigma|^2}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}, & N_{a,b,c,d} \cdot \Gamma &= \frac{u|(c + d\sigma) - \sigma(a + bs\sigma)|^2}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}, \end{aligned}$$

und wegen $\nabla = \Delta - uF_1 - F_2$ und $\Sigma = \Gamma - u|\sigma|^2 - F_2$ gilt

$$\begin{aligned} N_{a,b,c,d} \cdot \nabla &= \frac{-2u(ac + ad \operatorname{Re}(\sigma) + bcs \operatorname{Re}(\sigma) + bds|\sigma|^2)}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}, \\ N_{a,b,c,d} \cdot \Sigma &= \frac{-2u(ac \operatorname{Re}(\sigma) + bcs \operatorname{Re}(\sigma)^2 - bcs \operatorname{Im}(\sigma)^2 + bds|\sigma|^2 \operatorname{Re}(\sigma) + ad|\sigma|^2)}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der numerischen Darstellung von $N_{a,b,c,d}$ bezüglich der Basis $(F_1, F_2, \nabla, \Sigma)$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2u & -2u \operatorname{Re}(\sigma) \\ 0 & 0 & -2u \operatorname{Re}(\sigma) & -2u|\sigma|^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} N_{a,b,c,d} \cdot F_1 \\ N_{a,b,c,d} \cdot F_2 \\ N_{a,b,c,d} \cdot \nabla \\ N_{a,b,c,d} \cdot \Sigma \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})} \begin{pmatrix} u(c^2 + 2cd \operatorname{Re}(\sigma) + d^2|\sigma|^2) \\ a^2 + 2abs \operatorname{Re}(\sigma) + b^2s^2|\sigma|^2 \\ ac + 2bcs \operatorname{Re}(\sigma) + bds|\sigma|^2 \\ ad - bcs \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mit demselben Argument wie in Lemma 4.3.11 können wir den Grad der Abbildung $\sigma_{a,b,c,d}$ bestimmen und erhalten

$$\begin{aligned} \deg(\sigma_{a,b}) &= \operatorname{ggT} \left(\begin{aligned} &u(c^2 + 2cd \operatorname{Re}(\sigma) + d^2|\sigma|^2), \\ &a^2 + 2abs \operatorname{Re}(\sigma) + b^2s^2|\sigma|^2, \\ &ac + 2bcs \operatorname{Re}(\sigma) + bds|\sigma|^2, \\ &ad - bcs \end{aligned} \right). \end{aligned}$$

Wie zuvor lässt sich auch in diesem Fall nicht jede elliptische Kurve N durch das Bild einer Abbildung $\sigma_{a,b,c,d}$ mit Grad 1 darstellen.

Wir haben nun die notwendigen Aussagen, um die Schnittzahlen von elliptischen Kurven mit Geradenbündeln explizit zu berechnen:

Proposition 4.4.13. *Sei L ein Geradenbündel mit $L \equiv a_1F_1 + a_2F_2 + a_3\nabla + a_4\Sigma$ und $N_{a,b,c,d}$ eine elliptische Kurve auf $E_1 \times E_2$. Dann gilt*

$$L \cdot N_{a,b,c,d} = \frac{Q_L(a, b, c, d)}{\deg(\sigma_{a,b,c,d})},$$

wobei Q_L die quadratische Form ist, welche durch die folgende symmetrische Matrix M_L erzeugt wird

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 s \operatorname{Re}(\sigma) & -u(a_3 + a_4 \operatorname{Re}(\sigma)) & -u(a_3 \operatorname{Re}(\sigma) + a_4 |\sigma|^2) \\ * & a_1 s^2 |\sigma|^2 & -su(a_3 \operatorname{Re}(\sigma) + a_4 (\operatorname{Re}(\sigma)^2 - \operatorname{Im}(\sigma)^2)) & -su|\sigma|^2(a_3 + a_4 \operatorname{Re}(\sigma)) \\ * & * & a_2 u & a_2 u \operatorname{Re}(\sigma) \\ * & * & * & a_2 u |\sigma|^2 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung $L \mapsto M_L$ liefert einen Isomorphismus zwischen abelschen Gruppen, und die Matrixdarstellung liefert ein Kriterium, um zu prüfen, ob ein Geradenbündel L auf $E_1 \times E_2$ ample ist:

Korollar 4.4.14. *Sei $L \equiv a_1 F_1 + a_2 F_2 + a_3 \nabla + a_4 \Sigma$ ein Geradenbündel auf $E_1 \times E_2$ und M_L die zugehörige Matrixdarstellung. Dann gilt $\det(M_L) = (\frac{1}{2}su \operatorname{Im}(\sigma)^2 L^2)^2$ und wir haben die folgenden Äquivalenzen:*

- (i) L ist ample.
- (ii) M_L ist positiv-definit.
- (iii) Der Schnitt $L \cdot E$ ist für jede elliptische Kurve $E \subset E_1 \times E_2$ positiv.

Beweis. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ist offensichtlich, da M_L den Schnitt mit den elliptischen Kurven berechnet. Die Implikation (i) \Rightarrow (iii) folgt aus dem Fakt, dass $L \cdot C > 0$ für jede Kurve C gilt.

Für die Implikation (ii) \Rightarrow (i) müssen wir auf Hauptminoren von M_L zurückgreifen, da der Selbstschnitt nur als Quadrat in der Determinante auftaucht und somit nicht unmittelbar klar ist, ob L^2 positiv oder negativ ist. Aus den Hauptminoren erster Ordnung folgt, dass a_1 und a_2 positiv sind. Außerdem finden wir den Selbstschnitt in den Hauptminoren dritter Ordnung als positive Zahl wieder:

$$M_L^{(4,4)} = \frac{1}{2} s^2 u \operatorname{Im}(\sigma)^2 a_1 L^2.$$

Mit Lemma 4.4.5 folgt, dass L ample ist. □

Damit können wir nun für alle nicht-einfachen abelschen Flächen folgendes ample-Kriterium herleiten:

Satz 4.4.15. *Sei A eine nicht-einfache abelsche Fläche. Dann ist ein Geradenbündel L auf A genau dann ample, wenn der Schnitt $L \cdot N$ für jede elliptische Kurve $N \subset A$ positiv ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus den Aussagen von Lemma 3.3.4, Kor. 4.3.15 und Kor. 4.4.14. □

Literaturverzeichnis

- [1] Andreescu, T., Andrica, D.: Quadratic Diophantine Equations. Springer, 2015.
- [2] Bauer, Th.: Seshadri constants and periods of polarized abelian varieties. Math. Ann. 312, 607–623, 1998.
- [3] Bauer, Th.: Seshadri constants on algebraic surfaces. Math. Ann. 313, 547–583, 1999.
- [4] Bauer, Th., Bornträger, C.: Nef cone volumes and discriminants of abelian surfaces. Journal of Pure and Applied Algebra Vol. 222, Issue 8, 2330–2341, 2018.
- [5] Bauer, Th., Grimm, F.F., Schmidt, M.: On the integrality of Seshadri constants of abelian surfaces. European Journal of Mathematics 6, 1264–1275, 2020.
- [6] Bauer, Th., Schmidt, M.: Seshadri constants on principally polarized abelian surfaces with real multiplication. Preprint, [arXiv:2008.09216], 2020.
- [7] Bauer, Th., Schulz, C.: Seshadri constants on the self-product of an elliptic curve. Journal of Algebra 320, 2981–3005, 2008.
- [8] Bauer, Th., Szemberg, T.: Appendix to: Seshadri constants and periods of polarized abelian varieties. Math. Ann. 312, 607–623, 1998.
- [9] Bauer, Th., Di Rocco, S., Harbourne, B., Kapustka, M., Knutsen A.L., Syzdek, W., Szemberg, T.: A primer on Seshadri constants. Contemporary Mathematics 496, 33–70, 2009.
- [10] Birkenhake, C.: Tensor Products of Ample Line Bundles on Abelian Varieties. Manuscripta math. 84, 21–28, 1994.
- [11] Birkenhake, C., Lange, H.: Complex abelian varieties. Springer, 2004.
- [12] Buchmann, J., Vollmer, U.: Binary Quadratic Forms, An Algorithmic Approach. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [13] Buell, D. A.: Binary Quadratic Forms, Classical Theory and Modern Computations. Springer-Verlag New York, 1989.
- [14] Cohen, H.: Number Theory, Volume I: Tools and Diophantine Equations. Springer-Verlag, 2007.
- [15] Cox, D. A.: Primes of the form $x^2 + ny^2$, Fermat, Class Field Theory, and Complex Multiplication. John Wiley & Sons, Inc., second edition, 2013.

- [16] Demailly, J.-P.: Singular Hermitian metrics on positive lines bundles. John Wiley & Sons, Inc., second edition, 2013. Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990), Lect. Notes Math. 1507, Springer-Verlag, 87–104, 1992.
- [17] Dovgoshey, O., Martio, O., Ryazanov, V., Vuorinen, M.: The Cantor function. *Expositiones Mathematicae*, 24, 1–37, 2006.
- [18] Ein, L., Küchle, O., Lazarsfeld, R.: Local positivity of ample line bundles. *J. Differential Geom.* 42, 193–219, 1995.
- [19] Ein, L., Lazarsfeld, R., Mustață, M., Nakamaye, M., Popa, M.: Restricted volumes and base loci of linear series. *Am. J. of Math.* 131, 607–651, 2009.
- [20] Fujita, T.: On polarized manifolds whose adjoint bundles are not semipositive. *Algebraic Geometry, Sendai 1985*, In *Adv. Stud. in Pure Math.*, Vol 10, 167–178, 1987.
- [21] Grube, F.: Ueber einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen. *Z. Math. Phys.* 19, 492–519, 1874.
- [22] Hartshorn, R.: *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [23] Hayashida, T., Nishi, M.: Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves. *J. Math. Soc. Japan* 17, No. 1, 1–16, 1965.
- [24] Husemöller, D.: *Elliptic Curves*. Springer Science and Business Media, 2006.
- [25] Ibukiyama, T., Kaneko M.: Quadratic Forms and Ideal Theory of Quadratic Fields. In: *Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, 75–93. Springer, Tokyo, 2014.
- [26] Ibukiyama, T., Katsura, T., Oort, F.: Supersingular curves of genus two and class numbers. *Compos. Math.* 57, 127–152, 1986.
- [27] Kani, E.: Elliptic Curves on Abelian Surfaces. *Manuscripta Math.* 84, pp. 199–223, 1994.
- [28] Kani, E.: Idoneal numbers and some generalizations *Ann. Sci. Math. Quebec* 36 pp. 501–534, 2012.
- [29] Kani, E.: Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves and ternary quadratic forms. *J. Number Theory* 139, 138–174, 2014.
- [30] Kani, E.: The moduli spaces of Jacobians isomorphic to a product of two elliptic curves. *Collectanea Math.* Vol. 67, 21–54, 2016.
- [31] Note on number-theoretical properties of algebraic functions, *Tohoku Mathematical Journal*, 8, 24–37, 1915.
- [32] Lagarias, J. C.: Worst-Case Complexity Bounds for Algorithms in the Theory of Integral Quadratic Forms. *Journal of Algorithms* 1, 142–186, 1980.
- [33] Lange, H.: Principal polarizations on products of elliptic curves. In: *The geometry of Riemann surfaces and abelian varieties*, 153–162, *Contemp. Math.*, 397, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

- [34] Lazarsfeld, R.: Lengths of periods and Seshadri constants of abelian varieties. *Math. Res. Lett.* 3, 439–447, 1996.
- [35] Lazarsfeld, R.: *Positivity in Algebraic Geometry*, Vols. 1 and 2, Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [36] Lemmermeyer, F.: *Binary Quadratic Forms: An Elementary Approach to the Arithmetic of Elliptic and Hyperelliptic Curves*. Vorlesungsskript, 2010. <http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/hb3/publ/bf.pdf>
- [37] Mumford, D.: On the equations defining abelian varieties. I. *Inventiones mathematicae* 1(4), 287–354, 1966.
- [38] Murty, M. R.: Polynomials assuming square values. In: *Number theory and discrete geometry*, Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. 6, 155–163, Mysore, 2008.
- [39] Nakamaye, M.: Seshadri constants on abelian varieties. *American Journal of Math.* 118, 621–635, 1996.
- [40] Nakamaye, M.: Base loci of linear series are numerically determined. *Trans. Amer. Math. Soc.* 355, 551–566, 2002.
- [41] Runge, B.: Endomorphism rings of abelian surfaces and projective models of their moduli spaces. *Tohoku Math. J.* 51, 283–303, 1999.
- [42] Rupert, W.: Two-dimensional complex tori with multiplication by \sqrt{d} . *Arch. Math.* 72, 278–281, 1999.
- [43] Schmidt, M.: Integrality of Seshadri constants and irreducibility of principal polarizations on products of two isogenous elliptic curves. To be published in *Manuscripta math.*, Preprint: [arXiv:1911.10843]
- [44] Shioda, T., Mitani, N.: Singular abelian surfaces and binary quadratic forms. *Springer LNM* 412, 255–283, 1974.
- [45] Steffens, A.: Remarks on Seshadri constants. *Math. Z.* 227, 505–510, 1998.
- [46] Szemberg, T.: *Global and local positivity of line bundles*. Habilitationsschrift, Essen, 2001.
- [47] Szemberg, T.: On positivity of line bundles on Enriques surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 353, no. 12, 4963–4972, 2001.

Anhang

Maple-Code zur Konstruktion der Seshadri-Funktion

Wir stellen hier den Maple-Code zur Verfügung, mit dem wir die Graphen der Seshadri-Funktionen konstruiert haben. Die Funktion besteht im Wesentlichen aus zwei Teilfunktionen. Wir werden im Folgenden die beiden Funktionen erläutern:

Die erste Funktion *seshc* sucht in einem vorgegebenem Intervall (a, b) eine Seshadri-Kurve $C = qL_0 + pL_\infty$ mit $\frac{p}{q} \in (a, b)$, wobei zusätzlich eine untere und obere Schranke $m, M \in \mathbb{N}$ an die natürliche Zahl q übergeben wird, d. h. $m \leq q \leq M$. Die Schnittmatrix

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

wird als Liste $S = [A, B, C]$ übergeben. (Man beachte hier, dass diese Liste *nicht* mit der Darstellung der Schnittmatrix als quadratische Form $[A, 2B, C]$ übereinstimmt.) In der vorherigen Notation übergeben wir folgenden Input an die Funktion:

$$\text{seshc}(S, a, b, m, M).$$

Die Funktion sucht dann eine Pell-Schranke $\pi_{p/q}$ mit $\frac{p}{q} \in (a, b)$ und $m \leq q \leq M$, die Kor. 2.3.4 erfüllt, und daher die lineare Funktion einer Seshadri-Kurve ist.

Die Ausgabe der Funktion besteht aus zwei Informationen: Wir speichern in einer Liste die Daten über die gefundene Seshadri-Kurve $C = qL_0 + pL_\infty$ ab. Dazu gehört das Submaximalitäts-Gebiet $\text{SG}(C) = (c, d)$ und die natürliche Zahl m mit $C^2 = m^2 - 1$. (Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass immer der Fall $C^2 = m^2 - 1$ gilt. Numerisch macht es bei der Bildung des Seshadri-Quotienten keinen Unterschied.) Diese Daten der Kurve werden als Liste

$$\text{curve} = \left[\frac{p}{q}, c, d, q, p, m \right]$$

gespeichert. Die ersten drei Einträge liefern uns die Position im Querschnitt sowie das lineare Segment, auf der die Kurve submaximal ist, und die verbleibenden Werte die numerischen Daten der Kurve. Da wir nun eine Seshadri-Kurve im Intervall (a, b) gefunden haben, kann es keine Pell-Schranke π_τ mit $\tau \in (c, d)$ geben, die zu einer Seshadri-Kurve gehört. Die zweite Information, die wir ausgeben, ist die Zerlegung des Intervalls (a, b) in (a, c) und (b, d) , da wir die Suche iteriert auf die neuen Intervalle durchführen werden. Insgesamt ist die Ausgabe der Funktion *seshc* von der Form:

$$[\{ [a, c], [b, d] \}, \text{curve}].$$

Die zweite Funktion *seshf* führt nun die Funktion *seshc* iterativ aus, um auf $\mathcal{N}(X)$ Seshadri-Kurven zu finden. Sofern Automorphismen auf $\text{NS}(X)$ existieren, verwenden wir diese, um das Start-Intervall einzuschränken. Die Funktion wird durch

$$\text{seshf}(S, M)$$

aufgerufen und sucht mit Hilfe der Funktion *seshc* alle Seshadri-Kurven bis zur oberen Schranke M , die in $\mathcal{N}(X)$ bzw. dem Fundamentalintervall liegen. Anschließend werden diese Seshadri-Kurven genutzt, um mit Hilfe von Automorphismen weitere Seshadri-Kurven zu konstruieren. Die Ausgabe dieser Funktion besteht aus drei Komponenten: Die erste Komponente ist eine Liste mit allen Seshadri-Kurven, die im Fundamentalintervall gefunden wurden. Die zweite Komponente ist eine Liste, die zusätzlich die Seshadri-Kurven enthält, die aus zusätzlicher Anwendung der Automorphismen hervorgehen. Die dritte Komponente ist eine Liste, mit der wir die resultierenden linearen Stücke leicht in L^AT_EX-Code transformieren können.

Für das genauere Vorgehen und die einzelnen Schritte verweisen wir auf die Kommentare im Quellcode.

```
with(ArrayTools): with(Statistics): with(numtheory):

#####----- Definition einiger Hilfsfunktionen
pell4:=proc(D)
  local R1,R0,ret,i,b;
  # Die Loesungsdarstellung im Maple ist nicht konsistent
  # Deshalb betrachten wir Loesungen 0-ter und 1-er Ordnung
  # Zudem wollen wir die triviale Loesung (2,0) vermeiden
  R1:=simplify([isolve({x^2-D*y^2=4},{1})]):
  R0:=simplify([isolve({x^2-D*y^2=4},{0})]):
  ret:=[abs(rhs(R1[1][1])),abs(rhs(R1[1][2]))]:
  # Suche der kleinsten Loesung
  for i in R1 do
    b:=abs(rhs(i[2])):
    if b < ret[2] and b>0 then
      ret:=[abs(rhs(i[1])),b]:
    end if:
  end do:
  for i in R0 do
    b:=abs(rhs(i[2])):
    if b < ret[2] and b>0 then
      ret:=[abs(rhs(i[1])),b]:
    end if:
  end do:
  ret
end proc:
```

```

#-----
# Eingabe ist der Wert D der Pellischen-Gleichung  $x^2-Dy^2=1$ 
# Ausgabe ist die minimale Loesung der Gleichung
pell:=proc(D)
local R,a,b,ret;
  R:=isolve({ $x^2-D*y^2=1$ },{1});
  a:=abs(rhs(R[1][1]));
  b:=abs(rhs(R[1][2]));
  ret:=[a,b];
end proc:

#-----
# S=[a,b,c] beschreibt die Schnittmatrix
# Eingabe L1:=[q1,p1], L2:=[q2,p2] sind Koeff. der Geradenbuen-del
# Ausgabe ist der Schnitt der Geradenbuen-del unter Schnittmatrix S
C1C2:=proc(L1,L2,S)
local ret;
  ret:=S[1]*L1[1]*L2[1]+S[2]*L1[1]*L2[2]+S[2]*L1[2]*L2[1]+S[3]*L1[2]*L2[2]
end proc:

#-----
# Eingabe Geradenbuen-del mit nicht-quadratischem Selbstschnitt
# Ausgabe ist Submaximalitaet-gebiet der Pell-schranke
Pellint:=proc(L,S)
local SOL,ret;
  if S[3]<>0 then
    SOL:=[solve(C1C2(L,[1,X],S)/L[3]=sqrt(C1C2([1,X],[1,X],S)),X)]:
  else
    SOL:=[solve(C1C2(L,[1+X,1-X],S)/L[3]=sqrt(C1C2([1+X,1-X],[1+X,1-X],S)),X)]:
  end if:
  ret:=[min(SOL),max(SOL)]
end proc:

#-----
# Eingabe minlength ist minimale Laenge der Pell-Schranke
# Ausgabe ist obere Schranke fuer den Nenner von p/q
# so dass das Submaximalitaetsgebiet von p/q ueberhaupt
# die Laenge minlength besitzen kann
UppDom:=proc(minlength,S)
local ret;
  if S[3]<>0 then
    ret:=floor(max(2/minlength,0));
  else
    ret:=floor(max(8*sqrt(1/(2*S[2]-S[1]))+1)/minlength,0));
  end if:
end proc:

```

```

#-----
# Obere Schranke fuer die Seshadri-Konstante
MaxSesh:=proc(lambda,S)
  local ret;
  if S[3]<> 0 then
    ret:=sqrt(C1C2([1,lambda],[1,lambda],S));
  else
    ret:=sqrt(C1C2([1+lambda,1-lambda],[1+lambda,1-lambda],S));
  end if;
end proc;

#####
# Die Funktion gibt die erste Pell-Schranke aus (kleinsten Koeff. q),
# die zu einer submaximalen Kurve gehoert.
# Eingabe: S ist Schnittmatrix; LowerBound und Upperbound sind Schranken
# fuer die Koeffizienten der submaximalen Kurve
# (Die Funktion gibt zudem die verbleibenden Intervalle aus,
# in denen die Kurve nicht submaximal ist.)
seshc:=proc(S,fundamentalleft,fundamentalright,LowerBound,UpperBound)
  local notfound, La, lowLb, upLb, Lb, selfint, mult, L, seshadriquotL,
  PellintL, seshadribest, seshadriPELLbounds, t, minlength, LoQ, UpQ, Q,
  lowP, upP, P, selfintnewcurve, multnew, Lnew, seshadriquotnew, Lsesh,
  PellintLsesh, newfundamental, newinterval1, newinterval2, curve, ret;

  notfound:=true: # Pruefer, ob submaximale Kurve gefunden wurde

  #### Brute-force: Alle Geradenbueindel [La,Lb] mit  $L^2=m^2-1$ 
  # und pruefe, ob diese eine Seshadri-Kurve sein koennen
  for La from LowerBound to UpperBound while notfound do

    # Konstruktion von Schranken fuer Lb
    if S[3]<>0 then
      lowLb:=ceil(fundamentalleft*La):
      upLb:=floor(fundamentalright*La):
    else
      lowLb:=ceil(min(-La*(fundamentalleft-1)/(1+fundamentalleft),
                     -La*(fundamentalright-1)/(1+fundamentalright))):
      upLb:=floor(max(-La*(fundamentalleft-1)/(1+fundamentalleft),
                     -La*(fundamentalright-1)/(1+fundamentalright))):
    end if:

    for Lb from lowLb to upLb while notfound do
      # Pruefe ob [La,Lb] die numerische Bedingung  $L^2=m^2-1$  erfuehlt.
      # Im Fall  $L^2=m^2-4$  ist L ein gerades Vielfaches
      # und somit ist dieser Fall enthalten.
      selfint:=C1C2([La,Lb],[La,Lb],S):
      mult:=isqrt(selfint+1):
    end for
  end for
end proc

```

```

if mult^2=selfint+1 then
  # L ist also ein Kandidat fuer eine submaximale Kurve
  # Wir werden Geradenbuenchel immer in der Form [a,b,m] speichern
  L:=[La,Lb,mult]:
  seshadriquotL:=(mult^2-1)/(mult):
  PellintL:=Pellint(L,S):
  # Wir speichern hier den besten Seshadri-Quotienten
  # und Pellschranken mit dem besten Seshadri-Quotient
  seshadribest:=seshadriquotL:
  seshadripellbounds:=Array([]):
  seshadripellbounds:=Append(seshadripellbounds, L):
  # Korrespondierende Geradenbuenchel im Querschnitt
  if S[3]<> 0 then
    t:=Lb/La:
  else
    t:=(La-Lb)/(La+Lb):
  end if:

  # Konstruktion eines Intervalls,
  # auf dem die Seshadri-Kurve von L submaximal ist
  minlength:=min(abs(PellintL[1]-t), abs(PellintL[2]-t)):

#####----- Zuruecksetzen der Einrueckung aus Platzgruenden
# Es verbleibt zu zeigen, dass es keine andere Pell-Schranke [Q,P,m] gibt,
# dessen Seshadri-Quotient besser ist.
# Beachte, dass die einzige Moeglichkeit, dass es eine Kurve [Q,P,m]
# mit besserem Seshadri-Quotienten gibt, falls  $q \geq a$  gilt.
# Die Geradenbuenchel mit  $q < a$  haben wir bereits geprueft
# und diese gehoeren zu keiner submaximalen Kurve

# Hier lassen sich zahlreiche Optimierungen einfuehren,
# um die Schranken LoQ und UpQ zu verbessern. Wegen der Lesbarkeit
# des Codes wird hier darauf verzichtet.
LoQ:=La:
UpQ:=UppDom(minlength,S):

#### Die verbleibenden (endlichen) Werte werden Brute-forced
# Pruefe, dann ob die neue Pell-Schranke eine bessere Seshadri-Konstante besitzt.

for Q from LoQ to UpQ do
  if S[3]<>0 then
    lowP:=ceil(fundamentalleft*Q):
    upP:=floor(fundamentalright*Q):
  else
    lowP:=ceil(min(-Q*(fundamentalleft-1)/(1+fundamentalleft),
                  -Q*(fundamentalright-1)/(1+fundamentalright))):
    upP:=floor(max(-Q*(fundamentalleft-1)/(1+fundamentalleft),
                  -Q*(fundamentalright-1)/(1+fundamentalright))):
  end if:

```

```

for P from lowP to upP do
  selfintnewcurve:=C1C2([Q,P],[Q,P],S):
  multnew:=isqrt(selfintnewcurve+1):
  if multnew^2=selfintnewcurve+1 then
    Lnew:=[Q,P,multnew]:
    seshadriquotnew:=C1C2(L,Lnew,S)/multnew:
    if seshadribest > seshadriquotnew then
      seshadribest:=seshadriquotnew:
      seshadripellbounds:=Array([]):
      seshadripellbounds:=Append(seshadripellbounds, Lnew):
    elif seshadribest=seshadriquotnew and L<>Lnew then
      seshadripellbounds:=Append(seshadripellbounds, Lnew):
    end if:
  end if:
end do:
end do:

#### Speichern der Seshadri-Kurve und des zugehoerigen Intervalls
# Die Kurve wird im folgendem Format gespeichert:
# 1. ist der Quotient Lb/La, 2. und 3. sind die Intervallgrenzen
# 4.-6. ist das Geradenbuenchel [La,Lb,m]
if NumElems(seshadripellbounds)=1 then
  notfound:=false:
  Lsesh:=seshadripellbounds[1]:
  PellintLsesh:=Pellint(Lsesh,S):
  newfundamental:=Array([]):
  # In dem Submaximalitaetsgebiet der Kurve gibt es keine anderen Kurven.
  # Das urspruengliche Intervall wird also in bis zu drei Teilintervalle zerteilt
  if is(fundamentalleft<PellintLsesh[1]) then
    newinterval1:=[fundamentalleft,PellintLsesh[1],Lsesh[1]]:
    newfundamental:=Append(newfundamental, newinterval1):
  end if:

  if is(PellintLsesh[2]<fundamentalright) then
    newinterval2:=[PellintLsesh[2],fundamentalright,Lsesh[1]]:
    newfundamental:=Append(newfundamental, newinterval2):
  end if:
  curve:=[t,PellintLsesh[1],PellintLsesh[2],Lsesh[1],Lsesh[2],Lsesh[3]]:
  ret := [newfundamental,curve]:
end if:
#####----- Zuruecksetzen der Einrueckungen
  end if:
end do:
end do:

if notfound=true then
  ret:=false:
end if:

ret
# Ausgabe sind die verbleibenden Intervalle,
# in denen keine submaximale Kurve bisher gefunden ist
# und die neue submaximale Kurve.
end proc:

```



```
#####
#-----
# Konstruktion der Seshadri-Funktion
# Schnittmatrix von der Form
#  $S=[2A,B,2C]$ , mit  $A>0$ ,  $B\geq 0$ ,  $C<0$ 
# Falls  $\det(S)=n^2$ , dann muss  $S$  von der obigen Form
# oder von der Form  $S=[2A,B,0]$  sein
seshf:=proc(S,UpperBound)
local seshadricurves, intervals, detS, n, A, E1, LE1, intE1,
E2, LE2, intE2, g, d, pellsol, fundamentalleft, fundamentalright,
notfinished, newintervals, Inter, M, J, seshcurvesfundamental,
allseshc, seshcurvessorted, seshcurvesright, Pellmatrix, expon,
pos, coeff, PellintC, newcurve, seshcurvesleft, newcurves,
pointexport, curve,ret;

seshadricurves:=Array([]):
intervals:=Array([]):

detS:=S[2]^2-S[1]*S[3]:
n:=isqrt(detS):
A:=S[1]/2:

if n^2=detS then
  if S[3]<> 0 then
    # Bestimmen der elliptischen Kurven
    E1:=(S[2]-n)/(-S[3]):
    LE1:=[denom(E1),denom(E1)*E1,1]:
    intE1:=Pellint(LE1,S):
    seshadricurves:=Append(seshadricurves,[E1,intE1[1],intE1[2],LE1[1],LE1[2],1]):

    E2:=(S[2]+n)/(-S[3]):
    LE2:=[denom(E2),denom(E2)*E2,1]:
    intE2:=Pellint(LE2,S):
    seshadricurves:=Append(seshadricurves,[E2,intE2[1],intE2[2],LE2[1],LE2[2],1]):
    if is(intE1[2]<intE2[1]) then
      intervals:=Append(intervals, [intE1[2],intE2[1],1]):
    end if:
  else
    # Submaximalitaetsgebiete der elliptischen Kurven [0,1,1]
    # und  $E2=[2*n/g,-2*A/g,1]$ 
    # Der letzte Eintrag liefert die untere Schranke fuer die Suche,
    # da dies das erste Intervall ist, setzen wir die Schranke als 1.
    g:=2*gcd(n,A):
    seshadricurves:=Append(seshadricurves,
      [-1,-1,(2*n+2*A-n^2)/(2*n-2*A+n^2),0,1,1,1,-1]):
    seshadricurves:=Append(seshadricurves,
      [(n+A)/(n-A),(2*n^3+2*A*n^2-g^2)/(2*n^3-2*A*n^2+g^2),
      (n+A)/(n-A),2*n/g,-2*A/g,1,(n+A)/g,(n-A)/g]):
    if (2*n+2*A-n^2)/(2*n-2*A+n^2)<(2*n^3+2*A*n^2-g^2)/(2*n^3-2*A*n^2+g^2) then
      intervals:=Append(intervals,
        [(2*n+2*A-n^2)/(2*n-2*A+n^2),(2*n^3+2*A*n^2-g^2)/(2*n^3-2*A*n^2+g^2),1]):
    end if:
  end if:
end if:

```

```

else
  d:=gcd(S[1]/2,gcd(S[2],-S[3]/2)):
  pellsol:=pell14((S[2]^2-S[1]*S[3])/d^2):
  fundamentalleft:=0:
  fundamentalright:=(S[1]*pellsol[2]/(d*pellsol[1]-S[2]*pellsol[2])):
  intervals:=Append(intervals, [fundamentalleft,fundamentalright,1]):
end if:

notfinished:=true:

while notfinished do
# Wir arbeiten nun alle Intervalle ab.
# Im Laufe des Prozessen werden neue Intervalle entstehen.
# Durch die Schranken wird es Faelle geben, in denen in einem Intervall
# keine submaximale Kurve gefunden wird. Diese werden geloescht.
newintervals:=Array([]):
for Inter in intervals do
  M:=seshc(S,Inter[1],Inter[2],Inter[3],UpperBound):
  if M<> false then
    seshadricurves:=Append(seshadricurves, M[2]):
    for J in M[1] do
      newintervals:=Append(newintervals, J):
    end do:
  end if:
end do:
if NumElems(newintervals) = 0 then
  notfinished:=false:
else
  intervals:=newintervals:
end if:
end do:

###
# Wir nutzen nun die Automorphismen aus, um die verbleibenden Kurven zu bestimmen.
# Wir sortieren zunaechst die Kurve nach ihrer Position Lb/La.
seshcurvesfundamental:=sort(seshadricurves, (x,y)-> x[1]<=y[1]):

if n^2=detS then # In diesem Fall liegen keine Automorphismen vor.
  allseshc:=seshcurvesfundamental:
else
  seshcurvessorted:=seshcurvesfundamental:
  seshcurvesright:=Array([]):
  Pellmatrix:=Matrix([[d*pellsol[1]-S[2]*pellsol[2]]/(2*d),-S[3]/(2*d)*pellsol[2]],
    [S[1]/(2*d)*pellsol[2],(d*pellsol[1]+S[2]*pellsol[2])/(2*d)]):

  # Bilder von submaximalen Kurven liefern wieder submaximale Kurven
  # Hier konstruieren wir weitere Kurven rechts vom Fundamentalintervall
  for expon from 1 to 5 do
    for pos from 1 to numelems(seshcurvessorted) do
      coeff:=Pellmatrix^expon.Vector([[seshcurvessorted[pos][4]],
        [seshcurvessorted[pos][5]]]):
      PellintC:=Pellint([coeff[1],coeff[2],seshcurvessorted[pos][6]],S):
    end do:
  end do:
end if:

```

```

        if convert(PellintC[2]-PellintC[1],float)>10^(-6) then
            newcurve:=[coeff[2]/coeff[1],PellintC[1],PellintC[2],
                        coeff[1],coeff[2],seshcurvessorted[pos][6]]:
            seshcurvesright:=Append(seshcurvesright,newcurve):
        end if:
    end do:
end do:

# Hier wiederholen wir die Konstruktion
# fuer die linke Seite vom Fundamentalintervall
seshcurvesleft:=Array([]):
Pellmatrix:=1/Pellmatrix:

for expon from 1 to 6 do
    newcurves:=Array([]):
    for pos from 1 to numelems(seshcurvessorted) do
        coeff:=Pellmatrix^expon.Vector([[seshcurvessorted[pos][4]],
                                         [seshcurvessorted[pos][5]]]):
        PellintC:=Pellint([coeff[1],coeff[2],seshcurvessorted[pos][6]],S):
        if convert(PellintC[2]-PellintC[1],float)>10^(-6) then
            newcurve:=[coeff[2]/coeff[1],PellintC[1],PellintC[2],
                        coeff[1],coeff[2],seshcurvessorted[pos][6]]:
            newcurves:=Append(newcurves,newcurve):
        end if:
    end do:
    seshcurvesleft:=Concatenate(2,newcurves,seshcurvesleft):
end do:
allseshc:=Concatenate(2,seshcurvesleft,seshcurvessorted,seshcurvesright):
end if:

# Folgendes dient als Export, damit wir die lineare Stuecke der Seshadri-Kurven
# leicht nach LaTeX exportieren koennen.
pointexport:=Array([]):

for curve in allseshc do
    pointexport:=Concatenate(1,pointexport,Array(["draw","(",convert(curve[2],float),
        ":",convert(MaxSesh(curve[2],S),float),")","--","(",convert(curve[3],float),
        ":",convert(MaxSesh(curve[3],S),float),")",";"])):
end do:

ret := [seshcurvesfundamental,allseshc,pointexport]
end proc:

```

English summary

The aim of this thesis is to study Seshadri constants and to develop new methods to compute them on complex abelian surfaces. Demailly first introduced Seshadri constants in 1992 [16] with the intention of proving the Fujita conjecture [20]. The Seshadri constant of a nef line bundle L on a smooth projective variety V of dimension $g \geq 2$ in a point $x \in V$ is the real number

$$\varepsilon(L, x) = \inf \left\{ \frac{L \cdot C}{\text{mult}_x C} \mid x \in C \subset V \text{ irreducible curve} \right\}.$$

Since Seshadri constants only depend on the numerical class of L , it induces a well-defined function on the nef cone

$$\varepsilon_x : \text{Nef}(V) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L \mapsto \varepsilon(L, x).$$

The name has its origin in the Seshadri criterion for ampleness. By using Seshadri constants the criterion states that a divisor D is ample, if and only if there exists a number $\varepsilon' > 0$ such that $\varepsilon(D, x) \geq \varepsilon'$ for every point $x \in V$. The Seshadri constant of L in x may be interpreted as a local measure for how much positivity of L is located at x . The first part of the Fujita conjecture states that for every ample line bundle L and every $m \geq g + 1$ the line bundle $K_V + mL$ is globally generated. Demailly has shown in [16, Prop. 6.8] that this statement follows, if $\varepsilon(L, x) > \frac{g}{g+1}$ holds for every point $x \in V$. Unfortunately Miranda constructed surfaces and line bundles such that the Seshadri constant can become arbitrarily small for special points $x \in V$. This shows that the situation is more difficult than expected.

Surprisingly, Seshadri constants contain not only information about the local properties of the line bundle, but can also give some insight on the global structure of the variety. For example, Nakamaye has shown in [39] that an abelian variety A splits an elliptic curve, i. e. $A \cong E \times B$ for an elliptic curve E and an abelian variety B of dimension $g - 1$, if and only if there exists an ample line bundle L with $\varepsilon(L, 0) = 1$. Equally interesting is that the Nagata conjecture can be formulated via multi-point Seshadri constants. So, over time, it became more and more apparent that Seshadri constants are interesting invariants on their own.

As Seshadri constants are in general very hard to compute, it is helpful to consider varieties of low dimension which are well understood. Therefore, we will focus on complex abelian surfaces. In 1999, Bauer succeeded in [3] to compute all Seshadri constants on every abelian surface with Picard number 1. The essential ingredient used by Bauer are so called Pell divisors which will also play a major role in this thesis. Apart from that, in 2008 Bauer and Schulz studied some self-products $E \times E$ of elliptic curves E in [3]. They considered the cases where E either has no complex multiplication or has the complex multiplication $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ or $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ and were able to compute the Seshadri constant of every nef line bundle on $E \times E$. Interestingly, it turns out that the Seshadri constant on those products is always computed by an elliptic curve and, therefore, always an integer. For an abelian surface A we summarize in the following table the research status of Seshadri constants on abelian surfaces:

$\rho(A)$	non-simple	simple
1	non-existent	general abelian surface Bauer (1999)
2	case: $A = E_1 \times E_2$ E_1 and E_2 not isogenous (trivial case)	real multiplication: no results <hr/> complex multiplication: no results
3	case: $A = E \times E$ E without complex mult. Bauer, Schulz (2008)	indefinite quaternion mult.: no results
4	case: $A = E \times E$ $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[i]$ or $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$ Bauer, Schulz (2008)	non-existent

In this thesis, we will succeed to completely compute the Seshadri constant and even the numerical data of the Seshadri curves of every nef line bundle on an abelian surface with Picard number 2 and also give some insight on the structure of the Seshadri function. We will also discuss the question, if there are further abelian surfaces such that every Seshadri constant is an integer. This will yield further results for products $E_1 \times E_2$ of elliptic curves.

A natural starting point when considering Seshadri constants is to study properties of the curves on the variety. On abelian surfaces we can divide curves into two groups: elliptic curves and ample curves. We will show that every elliptic curve on an abelian surface passing through 0 computes the Seshadri constant in an open subcone of the nef cone and, therefore, they play a crucial part in the computation of Seshadri constants. For submaximal ample curves we will establish an essential connection to Pell divisors:

Theorem 1. *Let A be an abelian surface and C an irreducible and submaximal curve on A . Then, putting $m = \text{mult}_0 C$, one either has*

$$C^2 - m^2 = -1 \quad \text{or} \quad C^2 - m^2 = -4.$$

Furthermore, suppose that C is not an elliptic curve, and write $\mathcal{O}_A(C) = pM$ with a primitive ample line bundle M and an integer $p > 0$. Then $\sqrt{M^2}$ is irrational, and letting (ℓ, k) be the primitive solution of the Pell equation $x^2 - M^2 y^2 = 1$, we have:

- (i) *If $C^2 - m^2 = -1$, then the divisor $2C$ is the only Pell divisor for M . We have $P = 2C$ and $(\ell, k) = (m, p)$.*
- (ii) *If $C^2 - m^2 = -4$, then the curve C is the only Pell divisor for M . We have $P = C$ and $(2\ell, 2k) = (m, p)$. In this case, the origin is the only half-period that lies on C .*

This theorem will form the foundation of this work and implies a variety of properties and restrictions, which will be discussed in the second chapter of this thesis. One important implication of this theorem is that the Seshadri constant only depends on the Néron-Severi group. To be precise, the only numerical data entering the computation stems from the intersection matrix and the position of the nef cone, which are both fixed by any given basis of the Néron-Severi group.

Theorem 2. *Let X and Y be two (not necessarily isomorphic) abelian surfaces with Picard number ρ . Let (B_1, \dots, B_ρ) and (B'_1, \dots, B'_ρ) be a basis of $\text{NS}(X)$ and $\text{NS}(Y)$, such that their intersection matrix coincides and they canonically define the same nef cone in the Néron-Severi vector space. Then the Seshadri functions coincide with respect to the canonical isomorphism $\text{Nef}(X) \cong \text{Nef}(Y)$.*

As Seshadri constants on abelian surfaces with Picard number one are fully understood, the next natural case to be studied is the case of Picard number two. In the third chapter we will completely solve the issue of computing the Seshadri constant of any nef line bundle by providing an effective algorithm for their computation.

Theorem 3. *Let A be an abelian surface with $\rho(A) = 2$. Then there exists an algorithm that computes the Seshadri constant and Seshadri curve of any given nef line bundle.*

With the algorithm, we will not only be able to compute the Seshadri constant of a given line bundle, but also to approximate the graph of the Seshadri function. We show with following two examples how much the complexity of the Seshadri functions can differ. Note that we display the Seshadri function only on a compact cross-section of the nef cone.

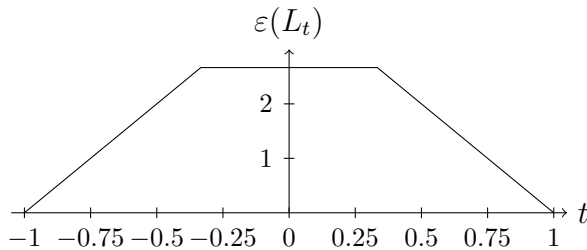


Fig. 4.1: The Seshadri function on a cross-section of the nef cone on an abelian surface with intersection matrix $\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

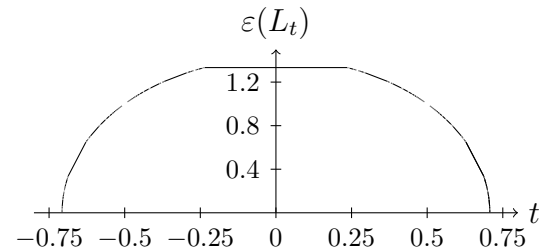


Fig. 4.2: The Seshadri function on a cross-section of the nef cone on an abelian surface with intersection matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

The Seshadri function in figure 4.1 is given on a non-simple abelian surface and is piecewise linear. The Seshadri function in figure 4.2 shows the Seshadri function on a simple abelian surface with real multiplication $\text{End}(E) = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ and has the property that the function consists of infinitely many linear segments that are never adjacent to each other. We define a function with such a property as follows:

Definition 4. Let $I \subset \mathbb{R}$ be a compact interval. A continuous function $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ is called *broken linear* if there is an infinite nowhere dense subset $M \subset I$ such that:

- (i) Around every point of $I \setminus M$ there is an open interval, contained in $I \setminus M$, on which f is linear.
- (ii) If $I_1 = (t_1, t_2)$ and $I_2 = (s_1, s_2)$ are maximal open subintervals of I on which f is linear, then I_1 and I_2 are contained in $I \setminus M$, and I_1 and I_2 are not adjacent to each other, (i. e. $t_1 \neq s_2$ and $t_2 \neq s_2$).

The Cantor function (see e. g. [17] or figure 3.6) is an example of a broken linear function, where the set M is the Cantor set.

Under the following assumption the Seshadri-function is broken linear:

Theorem 5. *Let A be a simple abelian surface with $\rho(A) = 2$. If every nef line bundle has at most one submaximal curve, then the Seshadri function is broken linear.*

We studied the question of when there exists at most one submaximal curve for each nef line bundle particularly on principally polarized abelian surfaces of Picard number two:

Theorem 6. *Let A be a principally polarized abelian surface with $\rho(A) = 2$. Suppose that either*

- $\text{End}^{\text{sym}}(A) = \mathbb{Z}[\sqrt{e}]$ for a non-square integer $e > 0$, or
- $\text{End}^{\text{sym}}(A) = \mathbb{Z}[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{e}]$ for a non-square integer $e > 0$, such that $e \equiv 1 \pmod{4}$ and e has a prime factor p with $p \equiv 5$ or $7 \pmod{8}$,

holds. Then every nef line bundle has at most one submaximal curve.

Computer-assisted calculations suggest that Thm. 6 is in fact an “if and only if” statement, which means that in the remaining cases there should always exist a line bundle with two submaximal curves.

At this point, however, it remains unclear how the Seshadri function is behaved in the remaining cases. On non-simple abelian surfaces the Seshadri function in figure 4.2 shows that it can be piecewise linear. But further examples show that more complex structures can also occur (see figure 3.20 and 3.23). In the case of simple abelian surfaces that have a line bundle with two submaximal curves, further examples suggest that the structure might be very similar to the case where every line bundle has at most one submaximal curve. Although the exact structure of the Seshadri function is very complex and not completely understood, the statement of Thm. 2 implies that the Seshadri function remains invariant under any isometry with respect to the intersection product which leaves the nef cone invariant. This yields the following global structure:

Theorem 7. *Let A be a simple abelian surface with $\rho(A) = 2$. Then there exists a decomposition of the ample cone into infinitely many subcones C_k , $k \in \mathbb{Z}$, such that the infinite group G of isometries of $\text{NS}(A)$ that leave the Seshadri function invariant acts transitively on the set of subcones. In particular, the values of the Seshadri function of one subcone C_k completely determines the Seshadri function on the entire nef cone.*

On the self-products of elliptic curves studied by Bauer and Schulz in [7] all Seshadri constants were integers and computed by elliptic curves. In the fourth chapter, we will discuss the question of whether there are more abelian surfaces on which all Seshadri constants are integers and if they are also always computed by elliptic curves. Bauer's results in [3] imply that there are abelian surfaces of Picard number one, such that all Seshadri constants are integers, but they are actually not computed by elliptic curves. Surprisingly, however, we can show for Picard number greater than one by using Thm. 1 the following:

Theorem 8. *Let A be an abelian surface with $\rho(A) \geq 2$. Then the following are equivalent:*

- (i) *For every ample line bundle on A the Seshadri constant is an integer.*
- (ii) *For every ample line bundle on A the Seshadri constant is computed by an elliptic curve.*

This result has the consequence that there always must be a non-integer Seshadri constant on every simple abelian surface of Picard number greater than one. So only the non-simple abelian surfaces remain. If the Picard number is two then we can apply the previous results and they show that there are exactly two classes of non-simple abelian surfaces such that all Seshadri constants are integers. In the case of Picard number 3 and 4 we will consider the cases where the abelian surface is a product $E_1 \times E_2$ of two isogenous elliptic curves, because we can explicitly compute the Néron-Severi group and the intersection matrix. One possible approach to the question is to construct explicit examples of line bundles with a non-integer Seshadri constant. Steffens showed in [45, Prop. 3], that the Seshadri constant of an irreducible principal polarization is $\frac{4}{3}$. The question whether or not there exists an irreducible principal polarization on products $E_1 \times E_2$ was first studied by Hayashida and Nishi [23]. Kani solved this problem in [29] and [30] almost completely and showed that there are 36 or 37 classes of products of elliptic curves $E_1 \times E_2$ that do not have an irreducible principal polarization. Considering the cases which were solved by Bauer and Schulz, we are left with 33 or 34 classes of products of elliptic curves $E_1 \times E_2$ on which it is unclear whether all Seshadri constants are integers. It turns out, that there is only one more class on which all Seshadri constants are integers:

Theorem 9. *Let E_1 and E_2 be two isogenous elliptic curves.*

- (i) *If E_1 and E_2 do not have complex multiplication, then all Seshadri constants on $E_1 \times E_2$ are integers if and only if the minimal degree of isogenies $\sigma : E_1 \rightarrow E_2$ is at most two.*
- (ii) *If E_1 and E_2 have complex multiplication, then all Seshadri constants on $E_1 \times E_2$ are integers if and only if E_1 and E_2 are isomorphic and they either have the complex multiplication $\text{End}(E_1) = \mathbb{Z}[i]$ or $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})]$.*

Moreover, in these cases there is an algorithm to effectively compute the Seshadri constant.

To obtain this result, we will first construct an explicit ample line bundle which can not have a weakly-submaximal elliptic curve. It follows that the Seshadri constant is not

computed by an elliptic curve. By considering the results of Bauer and Schulz the only case that remains are products $E_1 \times E_2$ of isogenous elliptic curves where the minimal degree of isogeny $\sigma : E_1 \times E_2$ is two. By representing the intersection of an ample line bundle with an elliptic curve $N \subset E_1 \times E_2$ by a positive definite (binary) quadratic form, we are able to show that every Seshadri constant is computed by an elliptic curve. This approach will also yield an effective algorithm to compute Seshadri constants in the case of Thm. 9 (i).

A large part of the results have already been published in [5], [43] and [6]. In this thesis we will partially generalize and extend those results. In [6] we studied the Seshadri constant and Seshadri function only on simple principally polarized abelian surfaces of Picard number two with real multiplication. The methods used for this case can be generalized for any abelian surface of Picard number two. Moreover, some results hold on arbitrary abelian surfaces, which could provide first approaches for the remaining cases in the future.

In the first chapter, we will not only summarize important basics and properties of Seshadri constants and abelian surfaces, but also introduce a new view on the Seshadri function. We will interpret the Seshadri function as an infimum of a family of linear function. This enables us to consider the computation of the Seshadri constant of a fixed nef line bundle L in x no longer as an isolated problem of L , but also to consider the global structure of the Seshadri function. As a consequence, properties of the Seshadri constant of L in a point x can affect the local or even the global behavior of the Seshadri function. For example, we will show what influence an upper bound for the Seshadri constant of L on x has on the Seshadri curves of L :

Proposition 10. *Let V be a smooth projective variety of dimension $g \geq 2$, $x \in V$ a point and L an ample line bundle. Let $0 < R < \sqrt[g]{L^g}$ be an upper bound for the Seshadri constant of L in x . Then there exists an convex open subcone $U(L, R, x)$ in $\text{Nef}(V)$ on which every Seshadri curve of L is submaximal, i. e. for any class $M \in U(L, R, x)$ and any Seshadri curve C of L in x we have*

$$\frac{M \cdot C}{\text{mult}_x C} < \sqrt[g]{M^g}.$$

This result will be an essential ingredient for the computation of Seshadri constants on abelian surfaces with Picard number two, since we will show that for any open subcone of the nef cone there only exist finitely many Seshadri curves which can be submaximal for every class in the subcone.

We also provide a new result in the first chapter about the local structure of the Seshadri function, which is necessary for Thm. 5. A result of Szemberg [46, Prop. 1.8] shows that on any smooth projective surface S an ample line bundle can have at most $\rho(S)$ submaximal curves at any given point. Using the interpretation of the Seshadri function as an infimum of linear functions, we show that the Seshadri function has a surprisingly simple local structure at L if $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$:

Proposition 11. *Let S be a smooth projective surface, $L \in \text{Nef}(S)$ and $x \in S$. Assume that $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ and let $1 \leq n \leq \rho(S)$ the number of Seshadri curves of L in x . Then there exists an open subcone $U \subset \text{Nef}(X)$ at L such that the Seshadri function is the minimum of n linear functions in U , i. e.*

$$\varepsilon_x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad L' \mapsto \min \{ \varphi_{C_i, x}(L') \mid i = 1, \dots, n \},$$

where C_1, \dots, C_n are the Seshadri curves of L in x .

That means that on one hand we have this simple local structure of the Seshadri function whenever $\varepsilon(L, x) < \sqrt{L^2}$ holds. And on the other hand the Seshadri function in figure 4.2 shows that the Seshadri function can be surprisingly complex at L if $\varepsilon(L, x) = \sqrt{L^2}$.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Prof. Dr. Thomas Bauer für die hervorragende Betreuung und die interessante Themenstellung bedanken. Durch unseren konstruktiven Austausch über fachliche, didaktische als auch persönliche Themen konnte ich wertvolle Erfahrungen sammeln, von denen ich auch in Zukunft sicherlich profitieren werde.

Bei Prof. Dr. Tomasz Szemberg bedanke ich mich für die Gelegenheit meine Ergebnisse in dessen Seminar vorstellen und diskutieren zu können sowie für die Bereitschaft das Zweitgutachten zu übernehmen.

Bei Lidia, Andreas, Elisa sowie Jens und Eric bedanke ich mich für die zum Teil mehrfache Durchsicht der Dissertation und ihre wertvollen Anmerkungen.

Abschließend danke ich meiner Familie für die Unterstützung in all den Jahren.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich meine Dissertation mit dem Titel

Seshadri-Konstanten auf Abelschen Flächen

selbständig und ohne fremde Hilfe verfasst, nicht andere als die in ihr angegebenen Quellen oder Hilfsmittel benutzt, alle vollständig oder sinngemäß übernommenen Zitate als solche gekennzeichnet sowie die Dissertation in der vorliegenden oder einer ähnlichen Form noch bei keiner anderen in- oder ausländischen Hochschule anlässlich eines Promotionsgesuchs oder zu anderen Prüfungszwecken eingereicht habe.

Dies ist mein erster Versuch einer Promotion.

Maximilian Schmidt
Marburg, den 30.04.2021

Lebenslauf

Die Seite 145 (Lebenslauf) enthält persönliche Daten. Sie ist deshalb nicht Bestandteil der Online-Veröffentlichung.